

**ZUR THEORIE DER
LIMITIERTEN VEKTORRÄUME**

Inaugural-Dissertation
zur
Erlangung der Doktorwürde
der
Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Freien Universität Berlin

vorgelegt von
Kurt Rainer Kutzler
aus Aussig/Elbe

1969

Druck:
ERNST-REUTER-GESELLSCHAFT
der Förderer und Freunde der Freien Universität Berlin e. V
DISSERTATIONS-DRUCKSTELLE
1 Berlin 33, Garystr. 45

**ZUR THEORIE DER
LIMITIERTEN VEKTORRÄUME**

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät

der Freien Universität Berlin

vorgelegt von

Kurt Rainer Kutzler

aus Aussig/Elbe

1.Referent: Prof.Dr.H.Pachale

2.Referent: Prof.Dr.A.Dinghas



Datum der mündlichen Prüfung: 8.Juli 1969

Datum der Promotion:

27. OKT. 1969

Mit dieser Arbeit möchte ich meinen Dank an Herrn Prof.Dr.H.Pachale für die Überlassung des Themas sowie seine stete freundliche Unterstützung und Förderung verbinden. Meine Dankbarkeit gilt auch Herrn Priv.-Doz. Dr.G.Wittstock für viele Diskussionen über die in der Arbeit angesprochenen Probleme, die er mit mir hier in Berlin führte.

Inhaltsverzeichnis

	Seite
Vorwort	1
1. Begründung der Theorie	3
2. Einige Bezeichnungsweisen	12
3. Limes-Räume	16
4. Der Vergleich von Limitierungen	19
5. Trennungsaxiome auf Limes-Räumen	30
6. Initiale Strukturen in $\underline{L}$	33
7. Induktive Limites und Quotienten- räume in $\underline{L}$	39
8. Limitierte Vektorräume	51
9. Induktive Limites in $\underline{LKV}$, $\underline{TopKV}$, $\underline{LkKV}$ und Quotientenräume	75
10. Spezielle induktive Systeme schwacher Topologien auf unendlichdi- mensionalen K -Vektorräumen	94
11. Einige Eigenschaften schwacher Topologien	103
12. Das Gegenbeispiel	107
13. Endlichdimensionale, separierte Vektorräume über nichtdiskret bewerteten Körpern	113
Literaturverzeichnis	123

Digitized by the Internet Archive
in 2026

Vorwort

Die Problemstellung dieser Arbeit entstammt der Lecture Note "Calculus in vector spaces without norm" von A.Frölicher und W.Bucher. Die Verfasser werfen dort die Frage auf, ob auf limitierten Vektorräumen, die heute in der Theorie der Differentialrechnung auf topologischen Vektorräumen mit nichtnormierbarer Topologie eine wesentliche Rolle spielen, gewisse, der vorgegebenen Vektorraumlimitierung zugeordnete Limitierungen beziehungsweise Topologien ebenfalls mit der Vektorraumstruktur verträglich sind. Diese Frage soll in der vorliegenden Arbeit beantwortet werden. Gleichzeitig werden noch einige Untersuchungen über Hilfsmittel angestellt, die dabei verwendet werden. Ein großer Teil der verwendeten Begriffe, insbesondere der Funktoren o , p und p^0 sind von H.R.Fischer [4] eingeführt und in gewissem Umfang untersucht worden. Insbesondere finden sich bei Fischer schon Ergebnisse über induktive Limites aufsteigend gerichteter Systeme, der Begriff des Quotientenraumes und die Definitionen sowie Eigenschaften der Trennungsaxiome. Um die Problemstellung genauer zu formulieren und zu untersuchen wird in dieser Arbeit zusätzlich ein Funktor p^1 , der "Funktork der nächstgröberen, linearen Topologie" eingeführt. Es wird außerdem eine Charakterisierung induktiver Limites von induktiven Systemen topologischer beziehungsweise lokalkonvexer Vektorräume in der Kategorie der limitierten Vektorräume angegeben. Neben der Antwort auf die von Frölicher und Bucher aufgeworfene

Frage erhält man insbesondere folgende Charakterisierung von endlichdimensionalen, separierten, limitierten Vektorräumen:

Ein Vektorraum über R oder C ist genau dann endlichdimensional, wenn jede separierte, mit der Linearstruktur verträgliche Limitierung eine Topologie ist.

Hierbei wird gleichzeitig der Satz von Tychonoff, daß auf endlichdimensionalen Vektorräumen über R oder C nur eine separierte (natürliche) Vektorraumtopologie existieren kann, auf limitierte Vektorräume verallgemeinert. In Abschwächung dieses Ergebnisses kann in Zusammenhang mit dem gestellten Problem ausgesagt werden, daß in der Kategorie der separierten, limitierten Vektorräume die endlichdimensionalen Vektorräume genau die linearen Räume sind, bei denen die Anwendung der Funktoren p und o nie aus der Kategorie herausführt.

1. Begründung der Theorie.

Betrachtet man auf dem Raum $R^{[a,b]}$ aller auf dem Intervall $[a,b]$ definierten, reellwertigen Funktionen den Begriff der "punktweisen Konvergenz fast überall" ([11]), so stellt man fest, daß von diesem Konvergenzbegriff die folgenden Bedingungen erfüllt werden:

- (i) Wenn zwei Filter auf $R^{[a,b]}$ punktweise fast überall gegen dieselbe Funktion konvergieren, so konvergiert auch ihr Durchschnitt punktweise fast überall gegen dieselbe Funktion.
- (ii) Wenn ein Filter $\mathcal{F}$ auf $R^{[a,b]}$ punktweise fast überall konvergiert und der Filter $\mathcal{G}$ auf $R^{[a,b]}$ den Filter $\mathcal{F}$ umfaßt (d.h., feiner als $\mathcal{F}$ ist,) so konvergiert auch $\mathcal{G}$ punktweise fast überall gegen denselben Limes.
- (iii) Der Filter aller Obermengen von Funktionen einer Funktion aus $R^{[a,b]}$ konvergiert gegen die Funktion, die ihn erzeugt.

Die Aussagen (i) - (iii), die, um Fragen der Abzählbarkeit zu vermeiden und eine der Topologie möglichst verwandte Ausdrucksweise zu erzielen, in der Filtersprache formuliert wurden, lassen sich für Folgen wie folgt interpretieren:

- (i) Konvergieren zwei Folgen gegen denselben Grenzwert, so konvergiert auch jede Mischung gegen diesen Limes.
- (ii) Konvergiert eine Folge, so konvergiert auch jede Teilfolge gegen denselben Grenzwert.

(iii) Jede konstante Folge konvergiert gegen das sie erzeugende Element.

Die oben zitierten Eigenschaften der punktweisen Konvergenz fast überall auf $R^{[a,b]}$ sind Bestandteile beziehungsweise Folgerungen, die sich aus den Hausdorffschen Topologieaxiomen ergeben, wenn man sie wie folgt formuliert:

E sei eine nichtleere Menge. Jedem Punkt x aus E sei ein Filter $\mathcal{U}(x)$ auf E zugeordnet, der Umgebungsfilter des Punktes x genannt wird und die folgenden Eigenschaften besitzt:

- (I) Der Filter aller Obermengen des Punktes x umfaßt den Filter $\mathcal{U}(x)$.
- (II) Zu jeder Menge U aus $\mathcal{U}(x)$ gibt es eine Menge W aus $\mathcal{U}(x)$ mit $W \subseteq U$ und der Eigenschaft, daß für jedes y aus W gilt: $W \in \mathcal{U}(y)$.

Die Charakterisierung der offenen Mengen erfolgt bei diesem Axiomensystem durch die Charakterisierung der Menge W in (II). Es ist unmittelbar zu verifizieren, daß durch diesen Erzeugungsprozess für offene Mengen mittels der Umgebungsfilter eine Topologie nach den Bourbaki-Axiomen definiert wird. Andererseits führt der aus den Bourbaki-Axiomen einer Topologie hergeleitete Begriff des Umgebungsfilters eines Punktes wieder auf die Hausdorffschen Axiome zurück.

In einem topologischen Raum wird ein Filter konvergent gegen einen Punkt genannt, wenn er den Umgebungsfilter dieses Punktes umfaßt. Man kann demnach die Hausdorffschen Axiome wie folgt formulieren:

Jedem Punkt x aus E ist eine Klasse von Filtern, die gegen x konvergent genannt werden, zugeordnet, die folgende Eigenschaften besitzt:

- (a) In dieser Klasse gibt es einen Filter, der in jedem anderen Filter der Klasse enthalten ist (= nämlich der Umgebungsfilter). Alle Filter, die den Umgebungsfilter umfassen, gehören zur Klasse.
- (b) Zu dieser Klasse gehört der Filter aller Obermengen des Punktes x .

(c) Der Umgebungsfilter erfüllt die Forderung (II).

Aus (a) leiten sich die Eigenschaften (i) und (ii) ab, die zusammen aber schwächer als die Aussage (a) sind. Die Forderung (iii) ist äquivalent zu dem Postulat (b). Man kann nun nachweisen, daß das oben aufgeführte Beispiel des Raumes $R^{[a,b]}$ mit der punktweisen Konvergenz fast überall genau den Bedingungen (i) - (iii) und keiner weiteren Forderung der Hausdorffschen Topologieaxiome genügt. Dies geschieht, indem man den Nachweis dafür führt, daß in der angegebenen Konvergenz kein "größter" Filter existiert mit der Eigenschaft, gegen die Nullfunktion punktweise fast überall zu konvergieren und in jedem gegen die Nullfunktion fast überall punktweise konvergenten Filter enthalten zu sein. Man konstruiert sich hierzu Funktionen f_s aus $R^{[a,b]}$ ($s \in [a,b]$) wie folgt:

$$f_s(t) = \begin{cases} 1 & / \quad s = t \\ 0 & / \quad \text{sonst} \end{cases} .$$

Dann konvergiert der Filter $[f_s]$ aller Obermengen von

$\{f_s\}$ in $R^{[a,b]}$ fast überall punktweise gegen die Nullfunktion. Würde nun ein größter, gegen 0 fast überall punktweise konvergenter Filter existieren, so wäre der Filter $[f_s]$ ($s \in [a,b]$) feiner als dieser größte Filter. Dies würde dann aber auch für den Filter

$\bigcap_{s \in [a,b]} [f_s]$ zutreffen. Dann wäre aber wegen (ii) der Durchschnitt $\bigcap_{s \in [a,b]} [f_s]$ punktweise fast überall gegen die Nullfunktion konvergent. Man weist aber nun leicht nach, daß jede Menge aus $\bigcap_{s \in [a,b]} [f_s]$ jede der Funktionen f_s ($s \in [a,b]$) enthält. Deswegen kann aber, wie man leicht zeigt, $\bigcap_{s \in [a,b]} [f_s]$ nicht fast überall punktweise gegen die Nullfunktion konvergieren.

In der punktweisen Konvergenz fast überall liegt eine Konvergenzstruktur vor, die nicht von einer Topologie erzeugt wird. (Das hier untersuchte Beispiel erweist sich sogar als nichttriviales Beispiel eines limitierten Vektorraumes.) Man wählt nun die Eigenschaften (i) - (iii) als Axiome für neue Strukturen, nämlich die der Limesräume. Der Begriff des Limesraumes erweist sich nach obigem Beispiel als allgemeiner als der Begriff des topologischen Raumes. Er ist insofern von Nutzen, als Probleme, die sich im Rahmen der Theorie der topologischen Räume nicht lösen ließen, weil die Topologie-Axiome noch zu stark waren, sich nun im Rahmen der Theorie der Limesräume bewältigen ließen. Ein Beispiel hierfür ist das Problem der stetigen Konvergenz. Allgemein wird es wie folgt formuliert:

Seien X und Y topologische Räume, $C(X,Y)$ der Raum aller stetigen Abbildungen von X in Y . Gesucht wird die größte Topologie auf $C(X,Y)$ derart, daß die Auswertungsabbildung (evaluation map) $e: C(X,Y) \times X \longrightarrow Y$ definiert durch $e(f,x) = f(x)$ stetig wird. Diese Topologie muß nicht notwendigerweise existieren. Man kann jedoch beweisen, daß zum Beispiel unter der Voraussetzung der Lokalkompaktheit von X die kompakt-offene Topologie den aufgestellten Forderungen genügt (c.f. [14]).

Von besonderem Interesse ist diese Frage in der Theorie der Fréchet-Ableitung auf Vektorräumen, die eine Konvergenzstruktur tragen, die nicht von einer normierbaren Topologie erzeugt wird, also zum Beispiel bei der Frage der Einführung einer Differentialrechnung auf nicht notwendigerweise normierbaren, lokalkonvexen Vektorräumen. Für einen lokalkonvexen Vektorraum gilt nämlich der folgende, von Maissen (c.f. [12]) bewiesene Satz:

Sei E ein separierter, lokalkonvexer Vektorraum. Der Raum $L(E)$ aller stetigen Endomorphismen auf E trage eine mit der Linearstruktur kompatible, separierte Topologie, so daß die Auswertungsabbildung $e: L(E) \times E \longrightarrow E$ stetig ist. Dann ist die Topologie auf E normierbar. Die Frage nach der Stetigkeit der Auswertungsabbildung tritt automatisch dann auf, wenn man auf topologischen, insbesondere lokalkonvexen Vektorräumen das Problem der zweiten und höherer Ableitungen und die Gültigkeit der Kettenregel hierfür betrachtet. Hier bot sich nun die

Theorie der limitierten Vektorräume an. Es konnte von Binz und Keller (c.f. [2]) gezeigt werden, daß im Rahmen der Theorie der Limes-Räume, zu der man unter anderem durch die Untersuchung von Konvergenzstrukturen vom Typ des zu Beginn angeführten Beispieles gelangte, das Problem einer "größten" Limitierung auf $C(X,Y)$ derart, daß die Auswertungsabbildung stetig wird, sich lösen läßt und daß diese Limitierung sich mit den zusätzlichen algebraischen Strukturen, die unter Umständen von Y in natürlicher Weise auf $C(X,Y)$ induziert werden, verträgt. Diese kanonisch gekennzeichnete Limitierung der "stetigen Konvergenz" erwies sich auch als separiert, sofern nur Y separiert ist (d.h., der Grenzwert von konvergenten Filtern ist eindeutig bestimmt). Damit bot sich die Theorie der limitierten Vektorräume zur Einführung des Begriffs der Fréchet-Ableitung auf nichtnormierbaren Vektorräumen mit Konvergenzstruktur an.

Man kann nun jeder beliebigen Konvergenzstruktur auf einer beliebigen, nichtleeren Menge, die den Bedingungen (i) - (iii) genügt, in kanonischer Weise gewisse spezielle Konvergenzstrukturen und Topologien, nämlich die sogenannte nächstgrößere Hauptideallimitierung und die nächstgrößere Topologie zuordnen. Es erhebt sich nun im Rahmen der Theorie der limitierten Vektorräume, d.h., auf Vektorräumen, die mit einer den Bedingungen (i) - (iii) genügenden Konvergenzstruktur versehen sind, die sich außerdem noch als - in einem bestimmten Sinne - mit der linearen Struktur verträglich erweist, die Frage, -

wie sie auch in [6] gestellt wird - , ob diese "grö-
beren" Konvergenzstrukturen in dem soeben angedeu-
ten Sinne ebenfalls mit der Vektorraumstruktur ver-
träglich sind. Hierbei werden solche Konvergenzstruktu-
ren von Interesse sein, in denen die Konvergenz eindeu-
tig ist, d.h., separierte Limitierungen. In diesem Rah-
men wird sich erweisen, daß auf unendlichdimensionalen
Vektorräumen stets separierte Limitierungen existieren,
deren nächstgrößere Hauptideallimitierung und Topologie
nicht mit der linearen Struktur kompatibel sind.
Es erhebt sich dann die Frage, ob dies auch auf endlich-
dimensionalen Vektorräumen der Fall sein kann. Hier
wird sich der Satz von Tychonoff verallgemeinern las-
sen, und man wird zu der am Ende des Vorwortes angedeu-
teten Aussage gelangen.

Ein wesentliches Hilfsmittel in den folgenden Untersu-
chungen wird der Begriff des induktiven Limes sein und
zwar der induktive Limes im Sinne der Theorie der lokal-
konvexen Vektorräume ebenso wie der im Sinne der topo-
logischen und der im Sinne der limitierten Vektorräume.
Letzterer fällt - und darauf beruhen im Grunde die hier
gefundenen Aussagen für unendlichdimensionale Vektorräu-
me - mit dem Begriff des induktiven Limes in der Kate-
gorie der Limes-Räume zusammen, im Gegensatz zu den in-
duktiven Limites von topologischen beziehungsweise lo-
kalkonvexen Vektorräumen, die nicht mit dem Begriff des
induktiven Limes in der Kategorie der topologischen
Räume identisch sind. Wie hier schon angedeutet wurde,
legt die Unterscheidung der verschiedenen Limesbegrif-
fe um größerer Klarheit willen für das Folgende eine

Ausdrucksweise in der Sprache der Kategorien und Funktoren nahe, die hier aber nur so weit wie unbedingt nötig angewendet werden soll.

Bei den folgenden Untersuchungen wird sich erweisen, daß man in dem Satz von H.R.Fischer (c.f. [4]), daß der induktive Limes von limitierten, separierten Vektorräumen in der Kategorie der Limes-Räume ein limitierter, separierter Vektorraum ist, einen weiteren Vorteil und eine weitere Begründung der Theorie der limitierten Vektorräume findet.

Es werde noch ein Beispiel für einen induktiven Limes im Sinne der Theorie der limitierten Vektorräume angeführt, das aus der nichtlinearen Funktionalanalysis stammt:

In der Theorie der monotonen Operatoren auf reflexiven Banach-Räumen werden endlichstetige Operatoren betrachtet. Das sind Operatoren, die einen reflexiven Banach-Raum X in seinen dualen Raum X^* abbilden und der Bedingung der Endlichstetigkeit genügen, d.h., daß sie jeden endlichdimensionalen Unterraum F von X stetig in den mit der schwachen Topologie $\mathcal{O}(X^*, X)$ versehenen dualen Raum abbilden. Betrachtet man nun alle endlichdimensionalen Unterräume von X , versieht sie mit der natürlichen Topologie und bildet für dieses induktive System den induktiven Limes in der Kategorie der limitierten Vektorräume, so erhält man genau die Limitierung auf X , die den Begriff der Endlichstetigkeit zusammen mit der Topologie $\mathcal{O}(X^*, X)$ erzeugt.

Für den Fall, daß X unendlichdimensional ist, ist

diese Limitierung keine Topologie, wie aus dem Satz (9.5) hervorgeht, der besagt, daß der induktive Limes von topologischen Vektorräumen in der Kategorie der limitierten Vektorräume nur dann topologisch ist, wenn das induktive System stationär wird.

2. Einige Bezeichnungsweisen.

Es sei E eine nichtleere Menge. Dann werde mit $\mathcal{F}(E)$ die Menge aller Filter auf E bezeichnet. Seien $\mathcal{F}_1$ und $\mathcal{F}_2$ zwei Filter auf E . Dann heiße $\mathcal{F}_1$ feiner als $\mathcal{F}_2$ - in Symbolen: $\mathcal{F}_1 \supseteq \mathcal{F}_2$ -, wenn gilt: $\mathcal{F}_1 \supset \mathcal{F}_2$. Man sagt auch, daß $\mathcal{F}_2$ größer als $\mathcal{F}_1$ sei und schreibt mitunter dafür $\mathcal{F}_2 \supseteq \mathcal{F}_1$.

Sei $(\mathcal{F}_a)_{a \in A}$ eine Familie von Filtern auf E . Dann existiert zu dieser Familie stets ein Filter aus $\mathcal{F}(E)$ mit der Eigenschaft, der feinste Filter zu sein, der größer ist als jeder der Filter der vorgegebenen Familie.

Er werde mit $\bigwedge_{a \in A} \mathcal{F}_a$ bezeichnet. Es gilt die folgende Darstellung:

$$\bigwedge_{a \in A} \mathcal{F}_a = \left\{ \bigcup_{a \in A} F_a \mid F_a \in \mathcal{F}_a \right\}.$$

Die Relation " $\supseteq$ " ist eine Ordnung auf $\mathcal{F}(E)$.

Es seien $\mathcal{F}_1$ und $\mathcal{F}_2$ aus $\mathcal{F}(E)$ Filter mit der Eigenschaft, daß für beliebige Mengen F_1 aus $\mathcal{F}_1$ und F_2 aus $\mathcal{F}_2$ stets gilt: $F_1 \cap F_2 \neq \emptyset$. Dann existiert auf E ein Filter mit der Eigenschaft, der gröſste Filter zu sein, der feiner als jeder der Filter $\mathcal{F}_i$ ($i=1,2$) ist. Dieser Filter werde mit $\mathcal{F}_1 \vee \mathcal{F}_2$ bezeichnet.

Es gilt die folgende Darstellung:

$$\mathcal{F}_1 \vee \mathcal{F}_2 = \left\{ F_1 \cap F_2 \mid F_1 \in \mathcal{F}_1, F_2 \in \mathcal{F}_2 \right\}.$$

Die Ordnungsrelation auf $\mathcal{F}(E)$ läßt sich zu einer Pr-ordnung auf die Klasse aller Filterbasen auf E wie folgt fortsetzen:

Eine Filterbasis $\mathcal{L}_1$ heiße feiner als eine Filterbasis $\mathcal{L}_2$ ($\mathcal{L}_1 \supseteq \mathcal{L}_2$), wenn es zu jeder Menge B_2 aus $\mathcal{L}_2$ eine Menge B_1 aus $\mathcal{L}_1$ derart gibt, daß gilt: $B_1 \subseteq B_2$.

Mit der oben definierten Ordnung ist $IF(E)$ induktiv geordnet. Die maximalen (feinsten) Filter heißen Ultrafilter. Sie sind gekennzeichnet dadurch, daß für jeden Ultrafilter $\mathcal{U}$ aus $IF(E)$ und jede Teilmenge A von E entweder die Relation $A \in \mathcal{U}$ oder die Relation $E \setminus A \in \mathcal{U}$ gelten muß. Es gilt ferner: Jeder Filter $\mathcal{F}$ ist das Infimum im Sinne der oben auf $IF(E)$ definierten Ordnungsrelation aller Ultrafilter, die feiner als $\mathcal{F}$ sind:

$$\mathcal{F} = \bigwedge_{\mathcal{U} \geq \mathcal{F}} \mathcal{U} \quad \mathcal{U} \text{ Ultrafilter}$$

Wenn x ein Punkt aus E ist, so werde der Filter, der aus der Menge $\{x\}$ und allen die Menge $\{x\}$ umfassenden Teilmengen von E besteht, mit $[x]$ bezeichnet. $[x]$ ist ein Ultrafilter.

Wenn $\mathcal{L}$ eine Filterbasis auf E ist, so werde der von $\mathcal{L}$ auf E erzeugte Filter mit $F_E(\mathcal{L})$ bezeichnet. Die Operation F_E , die jeder Filterbasis den Filter zuordnet, den sie erzeugt, ist bezüglich der oben definierten Präordnung monoton.

Seien M eine nichtleere Teilmenge von E und $\mathcal{F}$ ein Filter auf E mit der Eigenschaft, daß für jede Menge F aus $\mathcal{F}$ gilt: $F \cap M \neq \emptyset$. Dies ist genau dann der Fall, wenn der Filter $\mathcal{F} \vee F_E(\{M\})$ existiert. Dann ist

$$Sp_M(\mathcal{F}) := \{F \cap M \mid F \in \mathcal{F}\}$$

ein Filter auf M , der Spur von $\mathcal{F}$ auf M genannt wird.

Wenn zwei Filter $\mathcal{F}_1$ und $\mathcal{F}_2$ auf E Spuren auf M besitzen, so auch der Filter $\mathcal{F}_1 \wedge \mathcal{F}_2$. Es gilt: $Sp_M(\mathcal{F}_1 \wedge \mathcal{F}_2) = Sp_M(\mathcal{F}_1) \wedge Sp_M(\mathcal{F}_2)$. Wenn $\mathcal{F}_1 \vee \mathcal{F}_2$ existiert und auf M eine Spur besitzt, so existiert auch der Filter $Sp_M(\mathcal{F}_1 \vee \mathcal{F}_2)$ und es gilt:

$$Sp_M(\mathcal{F}_1 \vee \mathcal{F}_2) = Sp_M(\mathcal{F}_1) \vee Sp_M(\mathcal{F}_2).$$

Die Menge aller Filter auf E , die eine Spur auf der Menge M besitzen, werde mit $IF_M(E)$ bezeichnet.

Diese Menge ist der Definitionsbereich des Spuroperators Sp_M . Es gilt: $Sp_M(IF_M(E)) = IF(M)$. Man beachte, daß der Spuroperator ordnungserhaltend ist.

Seien E und E' zwei nichtleere Mengen und $f: E \rightarrow E'$ eine Abbildung. Dann wird jede Filterbasis $\mathcal{L}$ auf E auf die Filterbasis $\{ f(B) / B \in \mathcal{L} \}$ von E' abgebildet. Ist $\mathcal{F}$ ein Filter auf E , so wird der Filter $f(\mathcal{F})$ auf E' wie folgt definiert:

$$f(\mathcal{F}) := F_{E'}(\{ f(F) / F \in \mathcal{F} \}),$$

d.h., $f(\mathcal{F})$ ist der Filter auf E' , der von der Filterbasis der Bilder aller Mengen aus $\mathcal{F}$ unter f erzeugt wird. Da das Bild unter f einer Vereinigung von Mengen gleich der Vereinigung der Bilder der Mengen unter f ist, erhält man für das Infimum einer Filterfamilie $(\mathcal{F}_a)_{a \in A}$ auf E die folgende Relation:

$$f(\bigwedge_{a \in A} \mathcal{F}_a) = \bigwedge_{a \in A} f(\mathcal{F}_a).$$

Da das Bild des Durchschnittes zweier Mengen unter einer Abbildung stets im Durchschnitt der Bilder der beiden Mengen unter der Abbildung enthalten ist, folgt:

Existiert für zwei Filter $\mathcal{F}_1$ und $\mathcal{F}_2$ auf E das Maximum $\mathcal{F}_1 \vee \mathcal{F}_2$, so existiert auch für die Bildfilter $f(\mathcal{F}_1)$ und $f(\mathcal{F}_2)$ auf E' das Maximum. Es gilt:

$$f(\mathcal{F}_1 \vee \mathcal{F}_2) \cong f(\mathcal{F}_1) \vee f(\mathcal{F}_2).$$

Ist $\mathcal{F}'$ ein Filter auf E' , der auf $f(E)$ eine Spur besitzt, so bildet die Menge $\{ f^{-1}(F') / F' \in \mathcal{F}' \}$ eine Filterbasis auf E . Der von ihr auf E erzeugte Filter werde mit $f^{-1}(\mathcal{F}')$ bezeichnet.

Aus den Relationen

$$\bigcup_{a \in A} f^{-1}(F'_a) = f^{-1}\left(\bigcup_{a \in A} F'_a\right) \quad f^{-1}(F'_1) \cap f^{-1}(F'_2) = f^{-1}(F'_1 \cap F'_2)$$

folgt für jede Filterfamilie $(\tilde{f}'_a)_{a \in A}$, von der mindestens ein Filter eine Spur auf $f(E)$ besitzt:

$$f^{-1}\left(\bigwedge_{a \in A} \tilde{f}'_a\right) = \bigwedge_{a \in A} f^{-1}(\tilde{f}'_a).$$

Aus der Existenz des Filters $\tilde{f}'_1 \vee \tilde{f}'_2$ und der Voraussetzung, daß dieser Filter eine Spur auf $f(E)$ besitzt,

folgt die Existenz des Filters $f^{-1}(\tilde{f}'_1) \vee f^{-1}(\tilde{f}'_2)$

und die Relation $f^{-1}(\tilde{f}'_1) \vee f^{-1}(\tilde{f}'_2) = f^{-1}(\tilde{f}'_1 \vee \tilde{f}'_2)$.

Im allgemeinen gilt für einen Filter $\tilde{f}$ auf E die Relation

$$\tilde{f} \supseteq f^{-1}(f(\tilde{f})).$$

Die Gleichheit $\tilde{f} = f^{-1}(f(\tilde{f}))$ gilt insbesondere dann, wenn f bijektiv ist.

Sind $\tilde{f}$ ein Filter auf E und $\tilde{f}'$ ein Filter auf E' ,

so bildet die Menge $\mathcal{L} = \{F \times F' / F \in \tilde{f}, F' \in \tilde{f}'\}$ eine Filterbasis auf dem kartesischen Produkt $E \times E'$.

Dann werde der Filter $\tilde{f} \times \tilde{f}'$ definiert durch:

$$\tilde{f} \times \tilde{f}' := F_{E \times E}(\mathcal{L}).$$

Ist darüberhinaus E'' eine dritte, nichtleere Menge und ist $g: E \times E' \rightarrow E''$ eine Abbildung, so werde die folgende Schreibart als Vereinbarung getroffen:

$$g(\tilde{f}, \tilde{f}') := g(\tilde{f} \times \tilde{f}').$$

3. Limes-Räume.

(3.1)Definition: Sei E eine nichtleere Menge. Eine Abbildung $t: E \longrightarrow \mathcal{P}(IF(E))$ werde eine Limitierung genannt, wenn sie für jedes x aus E die folgenden drei Bedingungen erfüllt :

- (i) Aus $\mathcal{F} \in t(x)$ und $\mathcal{G} \in t(x)$ folgt $\mathcal{F} \wedge \mathcal{G} \in t(x)$.
- (ii) Aus $\mathcal{F} \in t(x)$ und $\mathcal{G} \supseteq \mathcal{F}$ folgt $\mathcal{G} \in t(x)$.
- (iii) Es gilt $[x] \in t(x)$.

Statt $\mathcal{F} \in t(x)$ wird mitunter auch $\mathcal{F} \xrightarrow[t]{} x$ geschrieben. Man sagt, daß der Filter $\mathcal{F}$ bezüglich der Limitierung t gegen x konvergiere. Die Klasse $t(x)$ wird auch Klasse aller bezüglich der Limitierung t gegen x konvergenten Filter genannt. Das geordnete Paar (E, t) wird limitierter Raum oder kurze Limes-Raum genannt. (Mitunter ist auch - insbesondere in [6] - der Ausdruck "pseudotopologischer Raum" gebräuchlich.) Die Menge aller Limitierungen auf E werde mit $\mathcal{T}(E)$ bezeichnet.

(3.2)Bemerkung: Auf Grund der Betrachtungen in Kapitel 1 ist bei entsprechender Formulierung der Hausdorffschen Topologieaxiome jeder topologische Raum ein Limes-Raum. In diesem Sinne werde auch eine Topologie stets als eine spezielle Limitierung interpretiert.

(3.3)Definition: Seien (E, t) und (E', t') Limes-Räume, $f: E \longrightarrow E'$ eine Abbildung. f heiße stetig im Punkte x aus E , wenn für jeden Filter $\mathcal{F}$ aus $t(x)$ folgt: $f(\mathcal{F}) \in t'(f(x))$. f heiße stetige Abbildung von (E, t) in (E', t') , wenn f in jedem Punkte von E stetig ist.

In diesem Falle schreibt man auch: $f:(E,t) \longrightarrow (E',t')$.
 Man erkennt sofort: Für jede nichtleere Menge E und jede Limitierung t aus $\mathcal{T}(E)$ gilt: $1_E:(E,t) \longrightarrow (E,t)$.
 Ferner ist jede konstante Abbildung stetig.

Es läßt sich unmittelbar zeigen, daß die Komposition von stetigen Abbildungen wieder eine stetige Abbildung ist. Hieraus folgt: Die Klasse aller Limes-Räume und aller stetigen Abbildungen mit der Hintereinanderausführung von stetigen Abbildungen als Komposition bildet eine Kategorie.

(3.4)Definition: Die Kategorie aller Limes-Räume werde mit $\underline{L}$ bezeichnet.

(3.5)Bemerkung: Sind die Limitierungen t aus $\mathcal{T}(E)$ und t' aus $\mathcal{T}(E')$ Topologien, so ist der oben definierte Stetigkeitsbegriff für Limes-Räume identisch mit dem Stetigkeitsbegriff für topologische Räume. Folglich erhält man:

(3.6)Satz: Die Kategorie $\underline{Top}$ aller topologischen Räume ist eine volle Unterkategorie der Kategorie $\underline{L}$.

(3.7)Definition: Sei E eine nichtleere Menge. Eine Limitierung t auf E heiße Hauptideallimitierung, wenn es zu jedem x aus E einen Filter $\mathcal{A}(x)$ auf E derart gibt, daß gilt: $t(x) = \{ \mathcal{F} / \mathcal{F} \in IF(E), \mathcal{F} \supseteq \mathcal{A}(x) \}$.
 $\mathcal{A}(x)$ wird auch der Umgebungsfiler des Punktes x bezüglich der Hauptideallimitierung t genannt. Die Klasse aller Hauptideallimitierungen auf E werde mit $\mathcal{T}_0(E)$ bezeichnet.

(3.8)Bemerkung: Nach (3.7) ist eine Limitierung t auf E genau dann Hauptideallimitierung, wenn es zu jedem

Punkt einen größten gegen den Punkt bezüglich τ konvergenten Filter gibt. Jede Topologie ist eine Hauptideallimitierung. Es gibt aber Beispiele für Hauptideallimitierungen, die keine Topologien sind. (Auf endlichen Mengen ist jede Limitierung Hauptideallimitierung. Es existieren auf endlichen Mengen Limitierungen, die keine Topologien sind.)

(3.9)Definition: Die Klasse aller Topologien auf der nichtleeren Menge E werde mit $\mathcal{T}_1(E)$ bezeichnet.

(3.10)Bemerkung: Es gilt $\mathcal{T}_1(E) \subseteq \mathcal{T}_0(E) \subseteq \mathcal{T}(E)$.

Da auf jeder nichtleeren Menge stets die diskrete und die indiskrete Topologie existieren, sind die Klassen $\mathcal{T}_1(E)$, $\mathcal{T}_0(E)$ und $\mathcal{T}(E)$ stets nichtleer.

Schränkt man in der Kategorie $\underline{L}$ die Klasse der Objekte auf die Klasse aller limitierten Räume, die Hauptideallimitierung tragen - und die Morphismen entsprechend - ein, so erhält man eine Kategorie $\underline{HL}$ von Objekten, Morphismen und Morphismenkomposition, die, wie man ohne weiteres verifiziert, eine volle Unterkategorie von $\underline{L}$ darstellt.

(3.11)Bemerkung: Es gilt : $\underline{Top} \subseteq \underline{HL} \subseteq \underline{L}$.

(3.12)Bemerkung: Das in Kapitel 1 betrachtete Beispiel der punktweisen Konvergenz fast überall ist eine Limitierung aber keine Hauptideallimitierung.

4. Der Vergleich von Limitierungen.

(4.1)Definition: Es sei E eine nichtleere Menge. t_1 und t_2 seien Limitierungen auf E . Die Limitierung t_1 heiße feiner als die Limitierung t_2 , wenn für jedes x aus E gilt: $t_1(x) \subseteq t_2(x)$.

Man schreibt: $t_1 \leq t_2$.

Die Aussage $t_1 \leq t_2$ ist, wie man sofort nachprüft, quivalent zu der Aussage $1_E: (E, t_1) \longrightarrow (E, t_2)$.

(4.2)Bemerkungen: Die Relation " $\leq$ " (" $\leq$ feiner als") bzw. " $\geq$ " (" $\geq$ gröber als") stellt auf $\mathcal{T}(E)$ eine Ordnung dar. Sind T_1 und T_2 Topologien auf E und sind für x aus E $\mathcal{U}_1(x)$ beziehungsweise $\mathcal{U}_2(x)$ die zu den Topologien gehörenden Umgebungsfilter des Punktes x , so wird allgemein die Topologie T_1 feiner als die Topologie T_2 genannt, wenn stets $\mathcal{U}_1(x) \supseteq \mathcal{U}_2(x)$ gilt. Genau in diesem Falle gilt für die Klassen $T_1(x)$ beziehungsweise $T_2(x)$ der gegen x konvergenten Filter: $T_1(x) \subseteq T_2(x)$. Das bedeutet: Die in (4.1) definierte Relation " $\leq$ feiner als" für Limitierungen stimmt für Topologien mit dem bisher bekannten Begriff überein.

In Analogie folgt aus der soeben angestellten Betrachtung zudem: Seien t_1 und t_2 zwei Hauptideallimitierungen auf E . Für jedes x aus E seien $\mathcal{N}_1(x)$ beziehungsweise $\mathcal{N}_2(x)$ die zu den Limitierungen gehörenden Umgebungsfilter. Dann ist $t_1 \leq t_2$ quivalent zu der Aussage: Für jedes x aus E gilt: $\mathcal{N}_1(x) \supseteq \mathcal{N}_2(x)$.

(4.3)Satz: Sei $f: (E, t) \longrightarrow (E', t')$. Ferner seien t_1 aus $\mathcal{T}(E)$ und t'_1 aus $\mathcal{T}(E')$ derart, daß gilt:

$t_1 \leq t$ und $t' \leq t'_1$. Dann gilt auch $f: (E, t_1) \longrightarrow (E', t'_1)$.

Beweis: Dies folgt aus :

$$(E, t_1) \xrightarrow{l_E} (E, t) \xrightarrow{f} (E', t') \xrightarrow{l_{E'}} (E', t'_1) .$$

(4.4)Satz: Seien (E, t) und (E', t') Limes-Räume.

t sei eine Hauptideallimitierung. Für x aus E sei

$\mathcal{N}(x)$ der Umgebungsfilter von x bezüglich t .

Notwendig und hinreichend für $f: (E, t) \longrightarrow (E', t')$

ist die Bedingung, daß für jedes x aus E gilt :

$$f(\mathcal{N}(x)) \in t'(f(x)).$$

Beweis: Da t Hauptideallimitierung ist, ist die Bedingung offensichtlich notwendig.

Gilt andererseits $f(\mathcal{N}(x)) \in t'(f(x))$, so folgt für jeden Filter $\mathcal{F}$ aus $t(x) : \mathcal{F} \geq \mathcal{N}(x)$. Hieraus folgt dann aber $f(\mathcal{F}) \geq f(\mathcal{N}(x))$ und mithin $f(\mathcal{F}) \in t'(f(x))$, also : $f: (E, t) \longrightarrow (E', t')$.

(4.5)Satz: Sei (E, t) ein Limes-Raum. Dann existiert eine eindeutig bestimmte Hauptideallimitierung $p_E(t)$ auf E derart, daß für jeden Limes-Raum (E', t') aus |HL| und jede Abbildung $f: E \longrightarrow E'$ die folgenden beiden Aussagen äquivalent sind :

- a) $f: (E, t) \longrightarrow (E', t')$
- b) $f: (E, p_E(t)) \longrightarrow (E', t')$.

Beweis: Man definiere die Abbildung $p_E(t): E \longrightarrow \mathcal{P}(\text{IF}(E))$ durch:

$$(x \in E) \quad p_E(t)(x) := \{ \mathcal{F} / \mathcal{F} \in \text{IF}(E) , \mathcal{F} \geq \mathcal{N}(x) \} ,$$

wobei gelte : $\mathcal{N}(x) := \bigwedge_{\mathcal{F} \in t(x)} \mathcal{F}$.

Es soll nun zuerst verifiziert werden, daß $p_E(t)$ eine Hauptideallimitierung ist. Da in der Klasse $p_E(t)(x)$ ein größter Filter - nämlich $\mathcal{N}(x)$ - existiert, sind

für $p_E(t)$ nur die Axiome (i) - (iii) nachzuweisen.

(i) Es gelte $\tilde{f}_1 \in p_E(t)(x)$ und $\tilde{f}_2 \in p_E(t)(x)$. Das ist genau dann der Fall, wenn gilt $\tilde{f}_1 \cong \mathcal{A}(x)$ und $\tilde{f}_2 \cong \mathcal{A}(x)$. Hieraus folgt: $\tilde{f}_1 \wedge \tilde{f}_2 \cong \mathcal{A}(x) \wedge \mathcal{A}(x) = \mathcal{A}(x)$, also $\tilde{f}_1 \wedge \tilde{f}_2 \in p_E(t)(x)$.

(ii) Es gelte $\tilde{f} \in p_E(t)(x)$ und $g \cong \tilde{f}$. Dann folgt aus $\tilde{f} \cong \mathcal{A}(x)$ auch $g \cong \mathcal{A}(x)$ und $g \in p_E(t)(x)$.

(iii) Es gilt $[x] \in t(x)$. Hieraus folgt $[x] \cong \bigwedge_{f \in t(x)} \tilde{f} = \mathcal{A}(x)$, also $[x] \in p_E(t)(x)$.

Die Limitierung $p_E(t)$ erfüllt obige Äquivalenzaussage:

Nach Definition von $p_E(t)$ gilt für jedes x aus E :

$t(x) \subseteq p_E(t)(x)$, also $l_E : (E, t) \longrightarrow (E, p_E(t))$.

Setzt man nun (b) voraus, so folgt aus

$$(E, t) \xrightarrow{l_E} (E, p_E(t)) \xrightarrow{f} (E', t')$$

die Behauptung (a).

Es werde nun angenommen, daß (a) gelte. Seien ferner

x aus E und $\mathcal{A}'(f(x))$ der Umgebungsfiler von $f(x)$ in E' bezüglich der Hauptideallimitierung t' .

Wegen (a) gilt für jedes $\tilde{f}$ aus $t(x)$ stets $f(\tilde{f}) \in t'(f(x))$ beziehungsweise $f(\tilde{f}) \cong \mathcal{A}'(f(x))$.

Daraus folgt:

$$f(\mathcal{A}(x)) = f\left(\bigwedge_{f \in t(x)} \tilde{f}\right) = \bigwedge_{f \in t(x)} f(\tilde{f}) \cong \mathcal{A}'(f(x)).$$

Da x aus E beliebig war, folgt wegen (4.4)

$$f : (E, p_E(t)) \longrightarrow (E', t').$$

Es bleibt nun noch die Eindeutigkeit der Definition von

$p_E(t)$ durch die Äquivalenz der Aussagen (a) und (b)

zu beweisen. Aus diesem Grunde werde angenommen, daß

t_1 aus $\mathcal{T}_0(E)$ ebenfalls die Äquivalenz von (a)

und (b) erfüllt. Hierbei werde berücksichtigt, daß

nach (a) aus $l_E: (E, t_1) \longrightarrow (E, t_1)$ folgt :
 $l_E: (E, t) \longrightarrow (E, t_1)$. Dann muß aber auf Grund der
 Äquivalenz der Aussagen (a) und (b) das folgende
 Diagramm gelten:

$$\begin{array}{ccc} (E, t) & \xrightarrow{l_E} & (E, p_E(t)) \\ & \begin{array}{c} \uparrow \downarrow \\ l_E \quad l_E \end{array} & \\ (E, t) & \xrightarrow{l_E} & (E, t_1) \end{array} \quad .$$

Hieraus folgt nach (4.1) , daß $p_E(t) = t_1$ gelten muß.

(4.6)Bemerkung: Wenn $t \in \mathcal{T}_0(E)$ gilt, so ist $p_E(t) = t$,
 d.h., durch p_E ist eine idempotente Abbildung von
 $\mathcal{T}(E)$ in $\mathcal{T}_0(E)$ definiert, deren Bild $\mathcal{T}_0(E)$ ist.
 Es kann nun sogar gezeigt werden, daß p_E einen Funk-
 tor $p: \underline{L} \longrightarrow \underline{HL}$ induziert, wenn man E als Parameter
 interpretiert. Der Funktor p wird wie folgt definiert:

$$p(E, t) := (E, p_E(t))$$

$$p(f: (E, t) \longrightarrow (E', t')) := f: (E, p_E(t)) \longrightarrow (E', p_E(t')) .$$

Um die Funktoreigenschaft von p nachzuweisen, braucht
 man, wie aus dem Vorangegangenen unmittelbar hervorgeht,
 nur die folgende Aussage bewiesen zu werden:

(4.7)Satz: Sei $f: (E, t) \longrightarrow (E', t')$ aus $\underline{L}$. Dann
 gilt: $f: (E, p_E(t)) \longrightarrow (E', p_E(t'))$.

Beweis: Aus (4.5) folgt:

$$\begin{array}{ccccc} (E, t) & \xrightarrow{f} & (E', t') & \xrightarrow{l_{E'}} & (E', p_{E'}(t')) \\ & \searrow l_E & & \dots & \nearrow f \\ & & (E, p_E(t)) & & \end{array}$$

und somit die Behauptung.

Es ist unmittelbar zu erkennen, daß p wirklich ein
 Funktor ist, da die zugrundeliegenden Mengen, Abbildun-
 gen und die Abbildungskomposition sich nicht ändern .

Die Definition (4.1) und der Satz (4.5) zusammen geben die Begründung dafür, weshalb der Funktor p "Funktor der nächstgrößeren Hauptideallimitierung" genannt wird. Es soll nun im Folgenden noch der "Funktor der nächstgrößeren Topologie" konstruiert werden.

(4.8)Satz: Sei (E, t) ein beliebiger Limes-Raum. Dann gibt es auf E eine eindeutig bestimmte Topologie $o_E(t)$ derart, daß für jeden topologischen Raum (E', T') und jede Abbildung $f: E \longrightarrow E'$ die folgenden beiden Aussagen äquivalent sind :

- (a) $f: (E, t) \longrightarrow (E', T')$
- (b) $f: (E, o_E(t)) \longrightarrow (E', T') .$

Beweis: Es werde zuerst durch Konstruktion die Existenz einer Topologie mit den geforderten Eigenschaften nachgewiesen. Hierzu sei x ein beliebiger Punkt aus E . $\mathcal{A}(x)$ sei der Umgebungsfilter von x bezüglich der Limitierung $p_E(t)$. Definiere nun ein Mengensystem $\mathcal{L}(x)$ wie folgt:

$$\mathcal{L}(x) := \{ W / W \in \mathcal{A}(x) \wedge \forall y (y \in W \leadsto W \in \mathcal{A}(y)) \} .$$

Es kann nun gezeigt werden, daß $\mathcal{L}(x)$ eine Filterbasis ist. Es ist klar, da $\mathcal{A}(x)$ ein Filter ist und mit- hin nicht die leere Menge enthält, daß $\emptyset$ nicht in $\mathcal{L}(x)$ enthalten ist. Seien W_1 und W_2 aus $\mathcal{L}(x)$. Dann liegen beide Mengen auch in $\mathcal{A}(x)$. Da $\mathcal{A}(x)$ ein Filter ist, gilt dann $W_1 \cap W_2 \in \mathcal{A}(x)$. Sei nun y aus $W_1 \cap W_2$. Dann gilt erst recht $y \in W_1$ und $y \in W_2$. Nach Definition von W_1 und W_2 folgt dann aber $W_1 \in \mathcal{A}(y)$ und $W_2 \in \mathcal{A}(y)$, also $W_1 \cap W_2 \in \mathcal{A}(y)$.

Dann gilt aber $W_1 \cap W_2 \in \mathcal{L}(x)$. Also ist $\mathcal{L}(x)$ eine Filterbasis. Es ist nach Konstruktion von $\mathcal{L}(x)$ klar, daß $\mathcal{N}(x) \supseteq \mathcal{L}(x)$ gilt. Sei nun $\mathcal{U}(x) := F_E(\mathcal{L}(x))$. Es wird nun behauptet, daß $\mathcal{U}(x)$ der Umgebungsfilter von x bezüglich einer Topologie auf E ist, die das Gewünschte leistet. Wegen der Idempotenz der Operation F_E für Filter und der Monotonie von F_E folgt insbesondere: $\mathcal{N}(x) \supseteq \mathcal{U}(x)$. Da $\mathcal{N}(x)$ Umgebungsfilter von x bezüglich der Hauptideallimitierung $p_E(t)$ ist, gilt $[x] \supseteq \mathcal{N}(x)$. Hieraus folgt aber dann $[x] \supseteq \mathcal{U}(x)$. Damit ist aber die Bedingung (I) der Hausdorffschen Topologieaxiome erfüllt. Es ist nun noch die Bedingung (II) für den Filter $\mathcal{U}(x)$ zu verifizieren. Sei U aus $\mathcal{U}(x)$. Dann gibt es nach Konstruktion des Filters $\mathcal{U}(x)$ eine Menge W aus $\mathcal{L}(x)$ mit $W \subseteq U$. Für y aus W gilt: $W \in \mathcal{N}(y)$. Da für alle z aus W gilt $W \in \mathcal{N}(z)$, folgt $W \in \mathcal{L}(y)$ und mithin nach Konstruktion des Filters $\mathcal{U}(y)$ auch $W \in \mathcal{U}(y)$ und somit $U \in \mathcal{U}(y)$. Damit ist nachgewiesen, daß der Filter $\mathcal{U}(x)$ auch dem zweiten Hausdorffschen Topologieaxiom genügt. Man definiere nun die Topologie $o_E(t)$ durch:

$$(x \in E) \quad o_E(t)(x) := \{ \tilde{f} / \tilde{f} \in IF(E), \tilde{f} \supseteq \mathcal{U}(x) \}.$$

Aus den Hausdorffschen Topologieaxiomen geht ferner hervor, daß die Familie $\mathcal{M}_t$ aller bezüglich der Topologie $o_E(t)$ offenen Mengen beschrieben wird durch:

$$\mathcal{M}_t = \bigcup_{x \in E} \mathcal{L}(x) \cup \{ \emptyset \}.$$

Es bleibt nun noch zu zeigen, daß die Topologie $o_E(t)$ den geforderten Bedingungen genügt.

Aus $\mathcal{N}(x) \supseteq \mathcal{U}(x)$ und $t \leq p_E(t)$ folgt insbesondere $t \leq o_E(t)$, d.h., $l_E : (E, t) \longrightarrow (E, o_E(t))$.

Setzt man nun (b) voraus, so folgt aus

$$(E, t) \xrightarrow{l_E} (E, o_E(t)) \xrightarrow{f} (E', T')$$

die Aussage (a).

Es gelte andererseits die Aussage (a). Da T' als Topologie insbesondere eine Hauptideallimitierung ist, folgt nach (4.5) $f : (E, p_E(t)) \longrightarrow (E', T')$. Für x' aus E' sei $\mathcal{U}'(x')$ der Umgebungsfiler von x' bezüglich der Topologie T' . Ferner sei x aus E beliebig. Es ist zu zeigen, daß $f(\mathcal{U}(x)) \supseteq \mathcal{U}'(f(x))$ gilt. Sei deshalb U' aus $\mathcal{U}'(f(x))$ beliebig. Dann gibt es eine T' -offene Menge W' aus $\mathcal{U}'(f(x))$ mit $W' \subseteq U'$. Definiere nun $W := f^{-1}(W')$. Um die Behauptung zu beweisen, genügt es zu zeigen, daß $W \in \mathcal{U}(x)$ gilt. Sei y aus W beliebig. Dann ist $f(y) \in W'$. Da W' als offen vorausgesetzt wurde, folgt $W' \in \mathcal{U}'(f(y))$. Nun folgt aber wegen $f : (E, p_E(t)) \longrightarrow (E', T')$ für jedes z aus E : $f(\mathcal{N}(z)) \supseteq \mathcal{U}'(f(z))$. Damit ergibt sich die folgende Kette von Ungleichungen:

$$\mathcal{N}(z) \supseteq f^{-1}(f(\mathcal{N}(z))) \supseteq f^{-1}(\mathcal{U}'(f(z))) .$$

Aus $W' \in \mathcal{U}'(f(y))$ folgt dann aber $W = f^{-1}(W') \in \mathcal{N}(y)$, d.h., es gilt $W \in \mathcal{U}(x)$. Demnach gibt es zu jedem U' aus $\mathcal{U}'(f(x))$ ein W aus $\mathcal{U}(x)$ derart, daß $f(W) \subseteq U'$ gilt, d.h., es gilt $f(\mathcal{U}(x)) \supseteq \mathcal{U}'(f(x))$.

Demnach ist $f : (E, o_E(t)) \longrightarrow (E', T')$.

Es bleibt die Eindeutigkeit von $o_E(t)$ zu beweisen.

Sei T eine Topologie auf E , die ebenfalls die Äqui-

valenz der Aussagen (a) und (b) erfüllt.

Es wurde bereits $l_E: (E, t) \longrightarrow (E, o_E(t))$ bewiesen.

Aus $l_E: (E, T) \longrightarrow (E, T)$ folgt nach (a)

$l_E: (E, t) \longrightarrow (E, T)$. Dann resultiert das folgende Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} (E, t) & \xrightarrow{l_E} & (E, o_E(t)) \\ & \begin{array}{c} \uparrow l_E \quad \downarrow l_E \\ \vdots \quad \vdots \end{array} & \\ (E, t) & \xrightarrow{l_E} & (E, T) \end{array} .$$

Hieraus folgt aber $o_E(t) = T$, d.h., die Topologie $o_E(t)$ ist eindeutig bestimmt.

(4.9)Corollar: Sei t eine beliebige Limitierung auf E . Dann gilt $o_E(t) = o_E(p_E(t))$.

Beweis: Sei (E', T') ein beliebiger topologischer Raum. Ferner sei $f: E \longrightarrow E'$ eine beliebige Abbildung. Als Topologie ist T' eine Hauptideallimitierung. Demnach gilt $f: (E, t) \longrightarrow (E', T')$ genau dann, wenn $f: (E, p_E(t)) \longrightarrow (E', T')$ gilt. Da T' aber eine Topologie ist, gilt nach (4.8) diese Aussage genau dann, wenn $f: (E, o_E(p_E(t))) \longrightarrow (E', T')$. Da nach (4.8) diese Äquivalenz nur von der Topologie $o_E(t)$ erfüllt wird, muß $o_E(t) = o_E(p_E(t))$ gelten.

(4.10)Bemerkung: Es wird im Folgenden unter Umständen von Vorteil sein, die offenen Mengen der Topologie $o_E(t)$ zu kennen. Auf Grund des Beweises von (4.8) werden die offenen Mengen mit Hilfe der Hauptideallimitierung $p_E(t)$ und der dadurch definierten UmgebungsfILTER $\mathcal{A}(x)$ ($x \in E$) wie folgt definiert :

Eine Teilmenge G von E ist bezüglich $o_E(t)$ genau dann offen, wenn für jedes x aus G gilt : $G \in \mathcal{A}(x)$.

Berücksichtigt man nun noch die Definition $\mathcal{O}(x) = \bigwedge_{f \in t(x)} f$, so erhält man die folgende Aussage:

G ist genau dann bezüglich der Topologie $\mathcal{O}_E(t)$ offen, wenn für jedes x aus G und jeden Filter f aus $t(x)$ gilt: $G \in f$.

Die Äquivalenz der Aussagen (a) und (b) in (4.8) begründet auch, weshalb die Topologie $\mathcal{O}_E(t)$ die "zu t nächstgrößere Topologie" genannt wird.

(4.11) Bemerkung: Es ist bekannt, daß $\mathcal{T}_1(E)$ mit der üblichen Ordnung einen vollständigen Verband bildet. Zu jeder Familie von Topologien aus $\mathcal{T}_1(E)$ kann man Infimum und Supremum finden. So hätte man auch die Topologie $\mathcal{O}_E(t)$ als das Infimum (im Sinne der hier verwendeten Ordnung) aller Topologien, die gröber als t sind, wohldefinieren können. Konkrete rechnerische Probleme ließen jedoch den hier eingeschlagenen Weg zur Konstruktion von $\mathcal{O}_E(t)$ als besser erscheinen. Das hier angedeutete Schlußverfahren soll jedoch in der noch zu entwickelnden Theorie der limitierten Vektorräume in etwas abgewandelter Form Verwendung finden.

(4.12) Bemerkung: Aus dem Konstruktionsverfahren beziehungsweise aus der Äquivalenz der Aussagen (a) und (b) in (4.8) geht unmittelbar hervor:

Wenn t bereits eine Topologie ist, so gilt stets $\mathcal{O}_E(t) = t$ und umgekehrt.

Hieraus ergibt sich zusammenfassend der folgende Satz:

(4.13) Satz: $\mathcal{O}_E : \mathcal{T}(E) \longrightarrow \mathcal{T}_1(E)$ ist eine surjektive, idempotente Abbildung, die jeder Limitierung t die nächstgrößere Topologie $\mathcal{O}_E(t)$ zuordnet. Aus (4.9)

folgt, daß die Abbildung o_E sich wie folgt mit sich selbst über p_E faktorisieren läßt :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{T}(E) & \xrightarrow{o_E} & \mathcal{T}_1(E) \\ & \searrow p_E \quad \nearrow o_E & \\ & \mathcal{T}_0(E) & \end{array} .$$

Ziel der folgenden Betrachtung ist es zu zeigen, daß sich durch die Abbildungen o_E (E durchlaufe als Parameter alle nichtleeren Mengen) ein Funktor $o: \underline{L} \longrightarrow \underline{Top}$ ebenso definieren läßt wie im Falle des Funktors p . Hierzu wird der folgende Satz benötigt:

(4.14)Satz: Seien (E, t) und (E', t') Limes-Räume, $f: (E, t) \longrightarrow (E', t')$. Dann gilt auch

$$f: (E, o_E(t)) \longrightarrow (E', o_{E'}(t')) .$$

Beweis: Die Behauptung folgt aus dem folgenden Diagramm, wobei die Faktorisierung nach (4.8) möglich ist, da $o_{E'}(t')$ eine Topologie ist:

$$\begin{array}{ccccc} (E, t) & \xrightarrow{f} & (E', t') & \xrightarrow{l_{E'}} & (E', o_{E'}(t')) \\ & \searrow l_E & & \nearrow f & \\ & & (E, o_E(t)) & \cdots & \end{array} .$$

(4.15)Definition: Wegen (4.8) und (4.14) ist der im Folgenden beschriebene Funktor $o: \underline{L} \longrightarrow \underline{Top}$ wohldefiniert:

$$o(E, t) := (E, o_E(t))$$

$$o(f: (E, t) \longrightarrow (E', t')) := f: (E, o_E(t)) \longrightarrow (E', o_{E'}(t')) .$$

Die Einschränkung von o auf die Unterkategorie HL induziert einen Funktor $o': \underline{HL} \longrightarrow \underline{Top}$. Wegen (4.13) gilt der folgende Satz:

(4.16)Satz: Der Funktor o läßt sich mit dem Funktor o' über p faktorisieren, so daß das folgende Diagramm kommutativ wird :



Alle im Diagramm auftretenden Funktoren sind surjektiv und idempotent .

5. Trennungsaxiome auf Limes-Räumen.

(5.1)Definition: (T_1) : Ein Limes-Raum (E, t) genügt dem Trennungsaxiom (T_1) , wenn für zwei Punkte x und y aus E mit $x \neq y$ stets gilt: $[x] \not\subseteq t(y)$.

(T_2) : Ein Limes-Raum (E, t) genügt dem Trennungsaxiom (T_2) oder heißt separiert, wenn für x und y aus E mit $x \neq y$ stets gilt: $t(x) \cap t(y) = \emptyset$.

(5.2)Bemerkung: Für topologische Räume stimmen diese Definitionen mit den geläufigen Definitionen überein. Ist (E, T) topologisch, so ist die Aussage (T_1) äquivalent zu der Aussage, daß der Filter $[x]$ nicht feiner als der Umgebungsfiler $\mathcal{U}(y)$ ist. Äquivalent hierzu ist die Existenz einer T -Umgebung U von y derart, daß $x \notin U$ gilt. Das ist aber das erste Trennungsaxiom für topologische Räume.

Ist (E, T) ein topologischer Raum, so besagt die Bedingung (T_2) , daß für die Umgebungsfiler $\mathcal{U}(x)$ und $\mathcal{U}(y)$ der Filter $\mathcal{U}(x) \vee \mathcal{U}(y)$ nicht existieren darf. Wäre dies nämlich der Fall, so würde $\mathcal{U}(x) \vee \mathcal{U}(y)$ in $T(x) \cap T(y)$ entgegen der Voraussetzung $T(x) \cap T(y) = \emptyset$ liegen. Man erkennt, daß die Aussage $T(x) \cap T(y) = \emptyset$ und die Aussage der Nichtexistenz des Filters $\mathcal{U}(x) \vee \mathcal{U}(y)$ äquivalent sind. Die Bedingung der Nichtexistenz des Filters $\mathcal{U}(x) \vee \mathcal{U}(y)$ ist aber äquivalent zu der Existenz zweier Mengen $U(x)$ aus $\mathcal{U}(x)$ und $U(y)$ aus $\mathcal{U}(y)$, so daß gilt: $U(x) \cap U(y) = \emptyset$.

(5.3)Bemerkung: Die Bedingung (T_2) ist notwendig und hinreichend dafür, daß der Grenzwert eines Filters bezüglich der vorgegebenen Limitierung im Falle der

Konvergenz des Filters eindeutig bestimmt ist. Man erkennt ferner, daß die Bedingung (T_2) stets die Gültigkeit der Bedingung (T_1) impliziert.

(5.4)Satz: Es genüge der Limes-Raum (E, t) der (T_1) - (beziehungsweise der (T_2) -) Bedingung. Ferner gelte für t_1 aus $\mathcal{T}(E)$: $t_1 \leq t$. Dann genügt t_1 ebenfalls der (T_1) - (beziehungsweise der (T_2) -) Bedingung.

Beweis: (T_1) : Nach Voraussetzung gilt für x und y aus E mit $x \neq y$ stets $[x] \not\subseteq t(y)$. Wegen $t_1(y) \subseteq t(y)$ folgt dann aber erst recht: $[x] \not\subseteq t_1(y)$.

(T_2) : Für x und y aus E mit $x \neq y$ gilt stets $t(x) \cap t(y) = \emptyset$. Wegen $t_1(x) \subseteq t(x)$ und $t_1(y) \subseteq t(y)$ folgt dann aber $t_1(x) \cap t_1(y) = \emptyset$.

(5.5)Satz: Der Limes-Raum (E, t) genüge der (T_1) -Bedingung. Dann sind auch $p(E, t)$ und $o(E, t)$ Limesbeziehungsweise topologische Räume, die der (T_1) -Bedingung genügen.

Beweis: Wegen $p_E(t) \leq o_E(t)$ genügt es nach (5.4) zu zeigen, daß $o(E, t)$ die (T_1) -Bedingung erfüllt. Für einen topologischen Raum ist die (T_1) -Bedingung äquivalent dazu, daß alle einpunktigen Mengen abgeschlossen sind, beziehungsweise, daß alle Komplemente von einpunktigen Mengen offen sind. Sei nun x aus E beliebig. Definiere: $M_x := E \setminus \{x\}$. Es ist zu beweisen, daß M_x bezüglich der Topologie $o_E(t)$ offen ist. Wenn E nur ein Element enthält, ist nichts zu zeigen. Es kann angenommen werden, daß $M_x \neq \emptyset$ gilt. Die offenen Mengen der Topologie $o_E(t)$ wurden in (4.10) beschrieben. Sei y aus M_x . (Das ist genau dann der Fall, wenn gilt:

$x \neq y$.) $\mathcal{A}(y)$ sei der UmgebungsfILTER von y bezüglich der Hauptideallimitierung $p_E(t)$. $\mathcal{A}(y)$ ist dann nach Definition von $p_E(t)$ Infimum aller gegen y bezüglich der Limitierung t konvergenten Filter. Da andererseits jeder gegen y konvergente Filter das Infimum aller Ultrafilter ist, die feiner als der Filter sind (und die wegen (ii) ebenfalls bezüglich t gegen y konvergieren), ist $\mathcal{A}(y)$ Infimum aller Ultrafilter, die bezüglich der Limitierung t gegen y konvergieren. Nun ist aber $[x]$ ein Ultrafilter, der nach Voraussetzung bezüglich t nicht gegen y konvergiert. Demnach kann kein gegen y bezüglich t konvergenter Ultrafilter die Menge $\{x\}$ enthalten. Also muß jeder Ultrafilter aus $t(y)$ die Menge M_x enthalten. Dann liegt aber M_x im Durchschnitt aller Ultrafilter aus $t(y)$, d.h., M_x liegt in $\mathcal{A}(y)$. Da y ein beliebiger Punkt aus M_x war, ist M_x nach (4.10) eine in der Topologie $o_E(t)$ offene Menge. Da x aus E beliebig war, ist somit die (T_1) -Bedingung für den topologischen Raum $o(E, t)$ verifiziert.

6. Initiale Strukturen in $\underline{L}$.

Generalprämisse: Alle in den folgenden Kapiteln auftretenden Indexmengen seien nichtleer.

(6.1)Satz: Sei A eine Indexmenge. $(E_a, t_a)_{a \in A}$ sei eine Familie von Limes-Räumen. E sei eine nichtleere Menge, $f_a: E \longrightarrow E_a$ ($a \in A$) seien Abbildungen.

Dann gibt es eine eindeutig bestimmte Limitierung t_I aus $\mathcal{F}(E)$ derart, daß für jeden Limes-Raum (E', t') und jede Abbildung $f: E' \longrightarrow E$ die folgenden Aussagen äquivalent sind:

$$(a) \quad f_a f: (E', t') \longrightarrow (E_a, t_a) \quad (a \in A)$$

$$(b) \quad f: (E', t') \longrightarrow (E, t_I)$$

Beweis: Definiere eine Abbildung $t_I: E \longrightarrow \mathcal{P}(\text{IF}(E))$

wie folgt:

$$(x \in E) \quad t_I(x) = \{ \tilde{f} / \tilde{f} \in \text{IF}(E) \wedge \forall a (a \in A \rightarrow f_a(\tilde{f}) \in t_a(f_a(x))) \}$$

Es ist zuerst zu zeigen, daß t_I eine Limitierung ist.

(i) Seien $\tilde{f}_1$ und $\tilde{f}_2$ aus $t_I(x)$. Dann gilt für jedes a aus A : $f_a(\tilde{f}_1 \wedge \tilde{f}_2) = f_a(\tilde{f}_1) \wedge f_a(\tilde{f}_2) \in t_a(f_a(x))$

nach Definition von t_I und wegen der Limitierungseigenschaft (i) von t_a . Daraus folgt aber $\tilde{f}_1 \wedge \tilde{f}_2 \in t_I(x)$.

(ii) Sei $\tilde{f}$ aus $t_I(x)$, und es gelte $\mathcal{g} \geq \tilde{f}$. Dann

gilt für jeden Index a aus A : $f_a(\mathcal{g}) \geq f_a(\tilde{f}) \in t_a(f_a(x))$

Da t_a eine Limitierung ist, folgt $f_a(\mathcal{g}) \in t_a(f_a(x))$

und mithin $\mathcal{g} \in t_I(x)$.

(iii) Für jedes x aus E und jeden Index a aus A

gilt: $f_a([x]) = [f_a(x)] \in t_a(f_a(x))$.

Hieraus folgt: $[x] \in t_I(x)$.

Damit ist die Limitierungseigenschaft von t_I nachgewiesen.

Für $\tilde{f}$ aus $t_I(x)$ und jeden Index a aus A folgt $f_a(\tilde{f}) \in t_a(f_a(x))$, d.h., für jeden Index a aus A gilt: $f_a:(E, t_I) \longrightarrow (E_a, t_a)$. Setzt man nun die Bedingung (b) voraus, so folgt die Bedingung (a) für die Limitierung t_I .

Es werde nun andererseits die Bedingung (a) vorausgesetzt. Sei y' aus E' und sei $\tilde{f}'$ aus $t'(y')$. Dann gilt nach Voraussetzung für jeden Index a aus A : $f_a f(\tilde{f}') = f_a(f(\tilde{f}')) \in t_a(f_a(f(y')))$. Die Definition von t_I impliziert dann aber $f(\tilde{f}') \in t_I(f(y'))$, d.h., es gilt $f:(E', t') \longrightarrow (E, t_I)$.

Es bleibt nun noch zu zeigen, daß t_I durch die Äquivalenz der Aussagen (a) und (b) eindeutig bestimmt ist. Sei t_1 eine weitere Limitierung auf E , die die Äquivalenz von (a) und (b) bedingt. Hieraus und wegen $l_E:(E, t_1) \longrightarrow (E, t_I)$ folgt unter Berücksichtigung von $f_a l_E = f_a$ ($a \in A$) und aus $f_a:(E, t_I) \longrightarrow (E_a, t_a)$ die Kommutativität der folgenden Diagrammfamilie:

$$\begin{array}{ccc}
 (E, t_I) & \xrightarrow{f_a} & (E_a, t_a) \\
 \vdots & \nearrow f_a & \uparrow f_a \\
 l_E \downarrow & & \\
 (E, t_1) & \xrightarrow{\dots\dots\dots} & (E, t_I) \\
 & l_E &
 \end{array} \quad (a \in A)$$

Hieraus folgt aber $t_1 = t_I$.

(6.2) Definition: Sei $(E_a, t_a)_{a \in A}$ eine Familie von Limes-Räumen. E sei eine nichtleere Menge, $f_a: E \longrightarrow E_a$ ($a \in A$) seien Abbildungen. Dann wird die in (6.1) konstruierte, eindeutig bestimmte Limitierung t_I auf E Initiallimitierung bezüglich dem System

$(E_a, t_a)_{a \in A}$ und den Abbildungen f_a genannt.

Für das Folgende sind die Initialstrukturen "Produkt" und "Unterraum" von Bedeutung.

(6.3) Definition: (E, t) sei ein Limes-Raum, M sei eine nichtleere Teilmenge von E , $j_M: M \longrightarrow E$ sei die kanonische Einbettung, t_M sei die von der kanonischen Einbettung j_M und dem limitierten Raum (E, t) auf M induzierte Initiallimitierung. Dann heißt (M, t_M) Unter-
raum von (E, t) .

(6.4) Bemerkung: Man rechnet sofort nach, daß t_M sich wie folgt beschreiben läßt:

$$(x \in M) \quad t_M(x) = \{ \text{Sp}_M(\mathcal{F}) \mid \mathcal{F} \in t(x) \cap \text{IF}_M(E) \}.$$

(6.5) Definition: Sei A eine Indexmenge, $(E_a, t_a)_{a \in A}$ sei eine Familie von Limes-Räumen. Ferner sei $E := \prod_{a \in A} E_a$. Es seien $\text{pr}_a: E \longrightarrow E_a$ ($a \in A$) die Projektionen von E auf die Räume E_a . Die Initiallimitierung auf E bezüglich der Familie $(E_a, t_a)_{a \in A}$ und der Projektionen pr_a werde mit $\prod_{a \in A} t_a$ bezeichnet. Sie wird die Produkt-limitierung auf E genannt.

(6.6) Bemerkung: Seien (E_1, t_1) und (E_2, t_2) Limes-Räume, $(x, y) \in E_1 \times E_2$. Ein Filter $\mathcal{F}$ auf $E_1 \times E_2$ konvergiert genau dann gegen (x, y) bezüglich der Produktlimitierung $t_1 \times t_2$, wenn gilt $\text{pr}_1(\mathcal{F}) \in t_1(x)$ und $\text{pr}_2(\mathcal{F}) \in t_2(y)$. Sind $\mathcal{F}_1$ ein Filter auf E_1 und $\mathcal{F}_2$ ein Filter auf E_2 , so konvergiert der Filter $\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$ auf $E_1 \times E_2$ genau dann gegen (x, y) bezüglich der Limitierung $t_1 \times t_2$, wenn gilt $\text{pr}_1(\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2) = \mathcal{F}_1 \in t_1(x)$ und $\text{pr}_2(\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2) = \mathcal{F}_2 \in t_2(y)$. Das bedeutet: Das Produkt zweier Filter konvergiert in

der Produktlimitierung genau dann, wenn jeder der Filter bezüglich der entsprechenden, auf dem Raum vorgegebenen Limitierung konvergiert. Insbesondere ist dann mit $\tilde{f} \in (t_1 \times t_2)(x, y)$ auch $pr_1(\tilde{f}) \times pr_2(\tilde{f}) \in (t_1 \times t_2)(x, y)$. Es werde noch der Zusammenhang zwischen Initialstrukturen in L und Top untersucht.

(6.7) Satz: Seien A eine Indexmenge, $(E_a, t_a)_{a \in A}$ eine Familie topologischer Räume, E eine nichtleere Menge, $f_a: E \rightarrow E_a$ Abbildungen und t_I die Initiallimitierung auf E bezüglich $(E_a, t_a)_{a \in A}$ und der Abbildungen f_a . Dann ist t_I eine Topologie. Insbesondere stimmen also bei topologischen Räumen Initialstrukturen in L und Top überein.

Beweis: Es genügt zu zeigen: $t_I = o_E(t_I)$.

Da die t_a Topologien sind, folgt aus $f_a: (E, t_I) \rightarrow (E_a, t_a)$ nach (4.8) auch $f_a: (E, o_E(t_I)) \rightarrow (E_a, t_a)$ ($a \in A$) und somit wegen $f: (E', t') \rightarrow (E, t_I)$ und

$$(E', t') \xrightarrow{f} (E, t_I) \xrightarrow{l_E} (E, o_E(t_I)) \xrightarrow{f_a} (E_a, t_a)$$

auch $f_a f: (E', t') \rightarrow (E_a, t_a)$.

Gilt umgekehrt für jedes a aus A stets

$f_a f: (E', t') \rightarrow (E_a, t_a)$, so folgt nach (6.1)

$f: (E', t') \rightarrow (E, t_I)$. Wegen $l_E: (E, t_I) \rightarrow (E, o_E(t_I))$

folgt dann $f: (E', t') \rightarrow (E, o_E(t_I))$. Nach (6.1)

folgt dann aber $t_I = o_E(t_I)$.

Insbesondere sind dann Produkt- und Unterräume von topologischen Räumen im Sinne der Kategorie L topologisch und stimmen mit Produkt- und Unterräumen im Sinne der Kategorie Top überein.

In Analogie zu (6.7) kann man noch beweisen:

(6.8)Satz: Sei $(E_a, t_a)_{a \in A}$ eine Familie von Limes-Räumen. Die t_a seien alle Hauptideallimitierungen, E sei eine nichtleere Menge, $f_a: E \longrightarrow E_a$ ($a \in A$) seien Abbildungen. t_I sei die Initiallimitierung auf E bezüglich $(E_a, t_a)_{a \in A}$ und der f_a . Dann ist t_I eine Hauptideallimitierung.

Im Zusammenhang zwischen Trennungsaxiomen und Initialstrukturen läßt sich noch der folgende Satz beweisen:

(6.9)Satz: Sei E eine nichtleere Menge, $(E_a, t_a)_{a \in A}$ sei eine Familie von Limes-Räumen, die alle der (T_1) -beziehungsweise der (T_2) -Bedingung genügen. Für a aus A sei $f_a: E \longrightarrow E_a$ eine Abbildung. Die Familie $(f_a)_{a \in A}$ von Abbildungen auf E trenne Punkte. Dann genügt die Initiallimitierung t_I auf E bezüglich $(E_a, t_a)_{a \in A}$ und der f_a ebenfalls der (T_1) - beziehungsweise der (T_2) -Bedingung.

Beweis: Seien x und y aus E mit $x \neq y$. Da $(f_a)_{a \in A}$ Punkte auf E trennt, existiert ein Index a_0 aus A derart, daß gilt $f_{a_0}(x) \neq f_{a_0}(y)$.

(T_1) : Da (E_{a_0}, t_{a_0}) nach Voraussetzung der (T_1) -Bedingung genügt, folgt $f_{a_0}([x]) = [f_{a_0}(x)] \neq t_{a_0}(f_{a_0}(y))$. Nach Konstruktion der Limitierung t_I folgt dann insbesondere $[x] \neq t_I(y)$.

(T_2) Es werde angenommen, daß zwar alle Räume (E_a, t_a) aber nicht der Raum (E, t_I) die (T_2) -Bedingung erfüllen. Dann muß es x und y aus E geben mit $x \neq y$, $t_I(x) \cap t_I(y) \neq \emptyset$. Sei $\tilde{f}$ aus $t_I(x) \cap t_I(y)$. Nach Konstruktion der Limitierung t_I muß aber gelten :

$f_{a_0}(\tilde{f}) \in t_{a_0}(f_{a_0}(x))$ und $f_{a_0}(\tilde{f}) \in t_{a_0}(f_{a_0}(y))$,
 was einen Widerspruch zur (T_2) - Bedingung auf
 (E_{a_0}, t_{a_0}) bedeuten würde .

7. Induktive Limes und Quotientenräume in $\underline{L}$.

(7.1)Definition: Sei A eine gerichtete Menge. Unter einem induktiven System von limitierten Räumen werde im Folgenden stets eine Familie $(E_a, t_a)_{a \in A}$ von Limes-Räumen verstanden, das die folgenden Eigenschaften besitzt:

- (I) Aus $a \leq b$ folgt : $E_a \subseteq E_b$ ($a, b \in A$)
- (II) Für a und b aus A mit $a \leq b$ ist stets die Einbettungsabbildung $j_{ab} : E_a \longrightarrow E_b$ eine bezüglich der Limitierungen t_a und t_b stetige Abbildung. Diese Aussage ist äquivalent dazu, daß die Relativlimitierung $(t_b)_{E_a}$ von t_b auf E_a gröber ist als die Limitierung t_a .

Durch das induktive System ist der mengentheoretische induktive Limes $E = \bigcup_{a \in A} E_a$ definiert. Für jeden Index a aus A sei $j_a : E_a \longrightarrow E$ die in natürlicher Weise definierte Einbettung.

(7.2)Satz: Sei $(E_a, t_a)_{a \in A}$ ein induktives System von Limes-Räumen. Dann existiert auf $E := \bigcup_{a \in A} E_a$ eine eindeutig bestimmte Limitierung t_F derart, daß für jeden Limes-Raum (E', t') und jede Abbildung $f : E \longrightarrow E'$ die folgenden beiden Aussagen äquivalent sind:

- (a) $f : (E, t_F) \longrightarrow (E', t')$
- (b) $f j_a : (E_a, t_a) \longrightarrow (E', t') \quad (a \in A).$

Beweis: Definiere eine Abbildung $t_F : E \longrightarrow \mathcal{P}(IF(E))$ durch:

$$(x \in E) \quad t_F(x) := \{ f / \exists a(a \in A \wedge x \in E_a \wedge \exists g(g \in t_a(x) \wedge f = j_a(g))) \}.$$

Es sollen zuerst die Limitierungseigenschaften von t_F

nachgewiesen werden.

(i) Seien $\mathcal{F}_1$ und $\mathcal{F}_2$ aus $t_F(x)$. Dann gibt es Indizes a und b aus A sowie Filter $\mathcal{G}_1$ aus $t_a(x)$ und $\mathcal{G}_2$ aus $t_b(x)$ derart, daß gilt: $\mathcal{F}_1 = j_a(\mathcal{G}_1)$ und $\mathcal{F}_2 = j_b(\mathcal{G}_2)$. Da A gerichtet ist, gibt es c aus A derart, daß gilt $a, b \leq c$. Wegen der Stetigkeit der Abbildungen j_{ac} und j_{bc} folgt: $j_{ac}(\mathcal{G}_1) \in t_c(x)$ und $j_{bc}(\mathcal{G}_2) \in t_c(x)$. Wegen der Limitierungseigenschaften von t_c folgt $j_{ac}(\mathcal{G}_1) \wedge j_{bc}(\mathcal{G}_2) \in t_c(x)$. Wegen der Identitäten $j_a = j_c j_{ac}$ und $j_b = j_c j_{bc}$ folgt: $\mathcal{F}_1 \wedge \mathcal{F}_2 = j_c j_{ac}(\mathcal{G}_1) \wedge j_c j_{bc}(\mathcal{G}_2) = j_c(j_{ac}(\mathcal{G}_1) \wedge j_{bc}(\mathcal{G}_2)) \in t_F(x)$ nach Definition von t_F .

(ii) Sei $\mathcal{F}_1 \in t_F(x)$. Ferner gelte $\mathcal{F}_2 \geq \mathcal{F}_1$. Dann gibt es einen Index a aus A und einen Filter $\mathcal{G}_1$ aus $t_a(x)$ mit $\mathcal{F}_1 = j_a(\mathcal{G}_1)$. Nun ist aber $\mathcal{F}_1 = j_a(\mathcal{G}_1) = F_E(\mathcal{G}_1)$. Ferner gilt $\mathcal{G}_1 = \text{Sp}_{E_a}(\mathcal{F}_1)$. Wegen $\mathcal{F}_2 \geq \mathcal{F}_1$ folgt $E_a \in \mathcal{F}_2$. Also gilt insbesondere $F_E(\text{Sp}_{E_a}(\mathcal{F}_2)) = \mathcal{F}_2$. Da die Operationen F_E und Sp_{E_a} ordnungserhaltend sind, folgt $\text{Sp}_{E_a}(\mathcal{F}_2) \geq \mathcal{G}_1$. Aus $\mathcal{G}_1 \in t_a(x)$ folgt dann aber auch $\text{Sp}_{E_a}(\mathcal{F}_2) \in t_a(x)$ und mithin

$$\mathcal{F}_2 = F_E(\text{Sp}_{E_a}(\mathcal{F}_2)) = j_a(\text{Sp}_{E_a}(\mathcal{F}_2)) \in t_F(x).$$

(iii) Wenn x aus E ist, so gibt es einen Index a aus A derart, daß gilt: $x \in E_a$. Nun ist $[x]_{E_a} \in t_a(x)$. (Hierbei ist $[x]_{E_a}$ der Filter aller Obermengen der Menge $\{x\}$ in E_a .) Hieraus folgt: $[x]_E = j_a([x]_{E_a}) \in t_F(x)$. Damit ist nachgewiesen, daß t_F eine Limitierung auf E ist. Nach Definition von t_F gilt für jeden Index

a aus A , jedes x aus E_a und jeden Filter $\mathcal{G}$ aus $t_a(x)$ stets $j_a(\mathcal{G}) \in t_a(x) = t_a(j_a(x))$. Also ist $j_a: (E_a, t_a) \longrightarrow (E, t_F)$ für jeden Index a aus A .

Setzt man nun (a) voraus, so folgt wegen des soeben Gezeigten die Aussage (b). Es gelte nun andererseits für jeden Index a aus A $fj_a: (E_a, t_a) \longrightarrow (E', t')$.

Seien x aus E und $\mathcal{F}$ aus $t_F(x)$. Dann gibt es einen Index a_0 und einen Filter $\mathcal{G}$ aus $t_{a_0}(x)$ mit $\mathcal{F} = j_{a_0}(\mathcal{G})$. Nach Voraussetzung folgt

$f(\mathcal{F}) = f(j_{a_0}(\mathcal{G})) \in t'(fj_{a_0}(x)) = t'(f(x))$. Damit

ist aber bewiesen, daß (b) die Aussage (a) impliziert. Es werde nun noch gezeigt, daß t_F die einzige Limitierung auf E ist, die die Äquivalenz von (a)

und (b) bedingt. Annahme: t_1 aus $\mathcal{T}(E)$ impliziere ebenfalls die Äquivalenz von (a) und (b).

Wegen $l_E: (E, t_1) \longrightarrow (E, t_1)$ folgt nach Voraussetzung für jeden Index a aus A auch: $j_a: (E_a, t_a) \longrightarrow (E, t_1)$.

Dann erhält man aber wegen der Voraussetzungen über

t_1 und t_F das folgende Diagramm:

$$\begin{array}{ccc}
 (E_a, t_a) & \xrightarrow{j_a} & (E, t_F) \\
 \downarrow j_a & \searrow j_a & \uparrow \text{ } l_E \\
 (E, t_F) & \cdots \cdots \cdots & (E, t_1) \\
 & l_E &
 \end{array}
 \quad (a \in A)$$

Hieraus folgt aber $t_F = t_1$.

(7.3) Definition: Sei $(E_a, t_a)_{a \in A}$ ein induktives System von Limes-Räumen. Dann wird (E, t_F) induktiver Limes dieses Systems genannt. Man schreibt:

$$(E, t_F) = \underline{\text{Lim}}_{>} (\underline{L}) (E_a, t_a).$$

Es wird auch die folgende Schreibweise verwendet:

$$t_F = \underline{\text{Lim}}_{>} (\underline{L}) t_a.$$

Hierbei besagt das Symbol $(\underline{L})$, daß der induktive Limes in der Kategorie $\underline{L}$ der Limes-Räume gewählt ist.

(7.4)Satz: Sei $(E_a, t_a)_{a \in A}$ ein induktives System in $\underline{L}$. Genügen dann alle Räume (E_a, t_a) der (T_1) - (beziehungsweise der (T_2) -) Bedingung, so genügt auch der induktive Limes (E, t_F) des Systems der (T_1) - (beziehungsweise der (T_2) -) Bedingung.

Beweis: (E_a, t_a) ($a \in A$) genüge der (T_1) -Bedingung. Seien x und y aus E mit $x \neq y$. Es gilt

$[y] \in t_F(x)$ genau dann, wenn es einen Index a_0 aus A so gibt, daß $[y]_{E_{a_0}} \in t_{a_0}(x)$ gilt. Das ist aber nicht möglich, da (E_{a_0}, t_{a_0}) der (T_1) -Bedingung genügt. Folglich muß $[y] \notin t_F(x)$ gelten.

(E_a, t_a) ($a \in A$) genüge der (T_2) -Bedingung. Es werde angenommen, daß (E, t_F) nicht der (T_2) -Bedingung genügt. Dann existieren x und y aus E mit $x \neq y$ und $t_F(x) \cap t_F(y) \neq \emptyset$. Sei $\tilde{f}$ aus $t_F(x) \cap t_F(y)$.

Dann gibt es Indizes a und b aus A sowie Filter

$\mathcal{G}_1$ aus $t_a(x)$ und $\mathcal{G}_2$ aus $t_b(y)$ derart, daß $\tilde{f} = j_a(\mathcal{G}_1) = j_b(\mathcal{G}_2)$ gilt. Da A gerichtet ist, existiert c aus A mit $a, b \leq c$. Da j_a und j_b Einbettungsabbildungen sind, sind $\mathcal{G}_1$ und $\mathcal{G}_2$ Basen des Filters $\tilde{f}$ in E . Wegen $E_a, E_b \subseteq E_c$ folgt $E_c \in \tilde{f}$. Demnach ist $Sp_{E_c}(\tilde{f})$ definiert, und es gilt

$$F_{E_c}(Sp_{E_c}(\tilde{f})) = j_c(Sp_{E_c}(\tilde{f})) = \tilde{f}.$$

Man rechnet nun für jeden Filter $\mathcal{H}$ auf E und die Einbettungsabbildung j_c die folgende Relation nach:

$$Sp_{E_c}(\mathcal{H}) = j_c^{-1}(\mathcal{H}).$$

Hierbei impliziert die Existenz des einen Ausdrucks die

Existenz des anderen. Demnach erhält man

$$\begin{aligned} \text{Sp}_{E_c}(\mathcal{F}) &= j_c^{-1}(\mathcal{F}) = j_c^{-1}(j_c(j_{ac}(\mathcal{G}_1))) = \\ &= j_c^{-1}(j_c(j_{bc}(\mathcal{G}_2))) = j_{ac}(\mathcal{G}_1) = j_{bc}(\mathcal{G}_2). \end{aligned}$$

Wegen der Stetigkeit der Abbildungen j_{ac} und j_{bc} liegt der Filter $\text{Sp}_{E_c}(\mathcal{F})$ demnach sowohl in $t_c(x)$ als auch in $t_c(y)$, was einen Widerspruch zur Voraussetzung bedeutet, daß alle Räume (E_a, t_a) separiert sein sollen.

(7.5)Definition: (E, t) sei ein Limes-Raum. Eine Teilmenge M von E heiße t -abgeschlossen, wenn sie eine abgeschlossene Teilmenge von E bezüglich der Topologie $o_E(t)$ ist.

(7.6)Bemerkung: Wegen $o_E(t) = o_E(p_E(t))$ und der Idempotenz des Funktors o ist die Teilmenge M von E genau dann t -abgeschlossen, wenn sie $p_E(t)$ -abgeschlossen beziehungsweise $o_E(t)$ -abgeschlossen ist.

(7.7)Satz: M ist genau dann t -abgeschlossen, wenn für jedes x aus E und jeden Filter $\mathcal{F}$ aus $t(x)$ mit $M \in \mathcal{F}$ folgt: $x \in M$.

Beweis: Sei M eine t -abgeschlossene Teilmenge von E . Hierzu ist äquivalent: $E \setminus M$ ist in der Topologie $o_E(t)$ offen. Dann folgt aber nach Konstruktion der offenen Mengen der Topologie $o_E(t)$ (c.f. (4.10)) :

Aus $y \in E \setminus M$ und $\mathcal{G} \in t(y)$ folgt $E \setminus M \in \mathcal{G}$. Auf Grund der Filteraxiome folgt dann aber $M \notin \mathcal{G}$. Also folgt für jedes x aus E mit $\mathcal{F} \in t(x)$ und $M \in \mathcal{F}$ stets $x \in M$.

Es gelte andererseits : Aus $\mathcal{F} \in t(x)$ und $M \in \mathcal{F}$ folge stets $x \in M$. Es ist zu zeigen, daß $E \setminus M$ bezüglich

bezüglich $\mathcal{o}_E(t)$ offen ist. Seien y aus $E \setminus M$ und $\mathcal{G}$ aus $t(y)$. Ferner sei $\mathcal{U}$ ein Ultrafilter, der feiner als $\mathcal{G}$ ist. Dann gilt auch $\mathcal{U} \in t(y)$. Da $\mathcal{U}$ Ultrafilter ist, gilt entweder $M \in \mathcal{U}$ oder $E \setminus M \in \mathcal{U}$. Da y kein Element aus M ist, muß $M \notin \mathcal{U}$ und mithin $E \setminus M \in \mathcal{U}$ gelten. Nun ist aber $\mathcal{G} = \bigwedge_{\mathcal{U} \supseteq \mathcal{G}} \mathcal{U}$ Ultrafilter. Danach gilt $E \setminus M \in \mathcal{G}$, d.h., $E \setminus M$ ist bezüglich $\mathcal{o}_E(t)$ offen. Also ist M t -abgeschlossen.

(7.8)Satz: $(E_a, t_a)_{a \in A}$ sei eine Familie von Limes-Räumen. E sei eine nichtleere Menge, $f_a: E \longrightarrow E_a$ ($a \in A$) seien surjektive Abbildungen. Dann existiert auf E eine eindeutig bestimmte Limitierung t_Q derart, daß für jeden Limes-Raum (E', t') und jede Abbildung $f: E \longrightarrow E'$ die folgenden beiden Aussagen äquivalent sind:

$$(a) \quad ff_a: (E_a, t_a) \longrightarrow (E', t') \quad (a \in A)$$

$$(b) \quad f: (E, t_Q) \longrightarrow (E', t')$$

Beweis: Man definiere eine Abbildung $t_Q: E \longrightarrow \mathcal{P}(\text{IF}(E))$ wie folgt: Sei y aus E . Ein Filter $\mathcal{F}$ aus $\text{IF}(E)$ gehöre genau dann zu $t_Q(y)$, wenn es Indizes $a_1, \dots, a_n$ aus A , Punkte x_{a_i} aus $f_{a_i}^{-1}(y)$ ($i=1, \dots, n$) und Filter $\mathcal{G}_i$ aus $t_{a_i}(x_{a_i})$ gibt, so daß $\mathcal{F} \supseteq \bigwedge_{i=1}^n f_{a_i}(\mathcal{G}_i)$ gilt.

Es werden zuerst die Limitierungs-Axiome für t_Q verifiziert.

(1) Seien $\mathcal{F}_1$ und $\mathcal{F}_2$ aus $t_Q(y)$. Dann existieren Indizes a_i und b_k aus A sowie Punkte x_{a_i} aus $f_{a_i}^{-1}(y)$ und x_{b_k} aus $f_{b_k}^{-1}(y)$ sowie Filter $\mathcal{G}_i$ aus $t_{a_i}(x_{a_i})$ und Filter $\mathcal{H}_k$ aus $t_{b_k}(x_{b_k})$ ($i=1, \dots, n$;

$k=1, \dots, m)$, so daß gilt:

$$\mathcal{F}_1 \cong \bigwedge_{i=1}^n f_{a_i}(\mathcal{G}_i) \quad \mathcal{F}_2 \cong \bigwedge_{k=1}^m f_{b_k}(\mathcal{H}_k)$$

Dann folgt:

$$\mathcal{F}_1 \wedge \mathcal{F}_2 \cong \bigwedge_{i=1}^n f_{a_i}(\mathcal{G}_i) \wedge \bigwedge_{k=1}^m f_{b_k}(\mathcal{H}_k) .$$

Nach Konstruktion von t_Q folgt dann : $\mathcal{F}_1 \wedge \mathcal{F}_2 \in t_Q(y)$.

(ii) Sei $\mathcal{F}_1$ wie in (i) . Ferner gelte $\mathcal{F} \cong \mathcal{F}_1$.

Dann ist aber $\mathcal{F} \cong \bigwedge_{i=1}^n f_{a_i}(\mathcal{G}_i)$ und mithin nach Definition von t_Q auch $\mathcal{F} \in t_Q(y)$.

(iii) Seien y aus E und a aus A beliebig. Da f_a surjektiv ist, gibt es x aus $f_a^{-1}(y)$. Es gilt dann $[y] = f_a([x])$ und mithin $[y] \in t_Q(y)$. Also ist t_Q eine Limitierung auf E . Es werde nun gezeigt, daß t_Q die Äquivalenz der Aussagen (a) und (b) erfüllt und daß t_Q durch die Äquivalenz dieser beiden Aussagen eindeutig bestimmt ist.

Nach Definition der Limitierung t_Q gilt für jeden Index a aus A , jedes x_a aus E_a und jeden Filter $\mathcal{G}_a$ aus $t_a(x_a)$ stets $f_a(\mathcal{G}_a) \in t_Q(f_a(x_a))$. Also folgt $f_a : (E_a, t_a) \longrightarrow (E, t_Q)$ ($a \in A$) . Da die Komposition von stetigen Abbildungen stetig ist, folgt aus der Voraussetzung (b) die Behauptung (a) .

Es gelte umgekehrt die Voraussetzung (a) . Seien y aus E und $\mathcal{F}_1$ aus $t_Q(y)$ wie in (i) . Wegen der Stetigkeit der Abbildungen ff_a für jedes a aus A folgt für $i = 1, \dots, n$: $ff_{a_i}(\mathcal{G}_i) \in t'(ff_{a_i}(x_{a_i})) = t'(f(y))$. Wegen der Voraussetzung über $\mathcal{F}_1$ folgt dann aber auch $f(\mathcal{F}_1) \cong \bigwedge_{i=1}^n ff_{a_i}(\mathcal{G}_i) \in t'(f(y))$ und somit $f : (E, t_Q) \longrightarrow (E', t')$.

Sei nun s eine weitere Limitierung auf E , die ebenfalls die Äquivalenz der Aussagen (a) und (b) bedingt. Aus $l_E: (E, s) \longrightarrow (E, s)$ folgt dann, da (b) die Aussage (a) impliziert, für jedes a aus A $l_E f_a: (E_a, t_a) \longrightarrow (E, s)$. Dann ergibt sich auf Grund der Voraussetzungen, der soeben gezeigten Relationen und der Relationen $f_a: (E_a, t_a) \longrightarrow (E, t_Q)$ ($a \in A$) die folgende Diagrammfamilie:

$$\begin{array}{ccc}
 (E_a, t_a) & \xrightarrow{f_a} & (E, t_Q) \\
 f_a \downarrow & \searrow f_a & \uparrow \hat{\vdots} l_E \\
 (E, t_Q) & \cdots \cdots \cdots & (E, s) \\
 & \uparrow l_E &
 \end{array}$$

Hieraus folgt aber $t_Q = s$ und somit die Behauptung des Satzes.

Ein wichtiger Spezialfall des soeben untersuchten Problems ist der, in dem die Familie A genau aus einem Element besteht. Dann erhält man den Begriff des Quotientenraumes.

(7.9) Definition: Sei (E_1, t_1) ein Limes-Raum. E sei eine nichtleere Menge. $f_1: E_1 \longrightarrow E$ sei eine surjektive Abbildung. Dann wird durch den Limes-Raum (E_1, t_1) und durch die Abbildung f_1 auf E eine Limitierung t_Q induziert, die die Äquivalenz der Aussagen (a) und (b) in (7.8) bedingt. Der Limes-Raum (E, t_Q) wird dann Quotientenraum bezüglich der Abbildung f_1 und dem Limes-Raum (E_1, t_1) genannt.

Bisher wurden initiale und spezielle finale Strukturen in der Kategorie $\underline{L}$ definiert und im Falle des induktiven Limes sowie bei den Initialstrukturen die Tren-

nungseigenschaften untersucht. Es werden für das Folgende die Trennungseigenschaften von Quotientenräumen sowie das Verhalten von finalen Strukturen unter den Funktoren p und o sowie noch zu definierenden Funktoren p^0 und p^1 , die ähnliche charakteristische Eigenschaften besitzen, von Interesse sein. Für jeden dieser Funktoren läßt sich der Satz beweisen, daß finale Strukturen in finale Strukturen der Bildkategorie übergeführt werden. Da der Beweis auf Eigenschaften zurückgeht, die alle Funktoren gemeinsam besitzen, soll er in kategorientheoretischer Sprache formuliert, durchgeführt und dann angewendet werden.

Im Folgenden sei Meng die Kategorie aller Mengen. Die Morphismenmengen zwischen je zwei Objekten E und E' einer vorgegebenen Kategorie sollen mit $[E, E']$ bezeichnet werden.

(7.10)Satz: Sei $\underline{K}$ eine Kategorie, deren Objekte strukturierte Mengen und deren Morphismen Mengenabbildungen sind. $\underline{U} \subseteq \underline{K}$ sei eine volle Unterkategorie, $\Delta: \underline{K} \longrightarrow \underline{\text{Meng}}$ sei der vergeßliche Funktor, d.h., der Funktor, der die Objekte auf die strukturlosen Mengen und die Abbildungen auf sich selbst - als Mengenabbildungen interpretiert - abbildet. Ferner sei $\Delta: \underline{K} \longrightarrow \underline{U}$ ein Funktor, der den folgenden Bedingungen genügt:

- (I) Für E aus $\underline{U}$ gilt : $\Delta(E) = E$.
- (II) Für E und E' aus $\underline{K}$ und f aus $[E, E']$ sei

$$\Delta(\Delta(f)) = \Delta(f).$$

- (III) Für E aus $\underline{K}$ und F aus $\underline{U}$ gilt:

$$[\Delta(E), F] = [E, F]$$

(interpretiert als Mengen von Abbildungen.)

Behauptung: Der Funktor Δ führt Finalstrukturen in $\underline{K}$ in Finalstrukturen in $\underline{U}$ über. Gleichzeitig folgt die Existenz von Finalstrukturen in $\underline{U}$, wenn sie in $\underline{K}$ existieren.

Beweis: Es werde zuerst bemerkt, daß für jedes Objekt E aus $\underline{K}$ gilt: $\mathbb{I}(\Delta(1_E)) = \mathbb{I}(1_E)$. Hieraus folgt aber unmittelbar nach Definition einer Kategorie $\mathbb{I}(E) = \mathbb{I}(\Delta(E))$.

Sei nun $(E_a)_{a \in A}$ eine Familie von Objekten aus $\underline{K}$.

M sei eine nichtleere Menge. Für a aus A seien $u_a: E_a \longrightarrow M$ Mengenabbildungen. (Hierbei werde vorausgesetzt, daß $\mathbb{I}(E_a)$ stets nichtleer ist.) Es existiere zu dieser Familie von Objekten und Abbildungen ein finales Objekt in $\underline{K}$, d.h., ein Objekt E aus $\underline{K}$ und Morphismen $f_a: E_a \longrightarrow E$ derart, daß $\mathbb{I}(E) = M$ und $\mathbb{I}(f_a) = u_a$ ($a \in A$) gilt und für jedes Objekt F aus $\underline{K}$ die folgenden Aussagen äquivalent sind:

- (a) $f \in [E, F]$
- (b) $ff_a \in [E_a, F]$ ($a \in A$).

Es soll nun gezeigt werden, daß $\Delta(E)$ finales Objekt mit den Morphismen $\Delta(f_a)$ in $\underline{U}$ bezüglich der Objekte $\Delta(E_a)$ und der Abbildungen u_a ist. (Bemerkung: Die Behauptung ist sinnvoll, da nach Obigem $\mathbb{I}(\Delta(E_a)) = \mathbb{I}(E_a)$ sowie $\mathbb{I}(\Delta(E)) = \Delta(E) = M$ und nach (II) $\mathbb{I}(\Delta(f_a)) = \mathbb{I}(f_a) = u_a$ gilt.) Sei nun G ein beliebiges Objekt aus $\underline{U}$ und sei f aus $[\Delta(E), G]$. Wegen (III) ist das genau dann der Fall, wenn $f \in [E, G]$ gilt. Da E aber finales Objekt in $\underline{K}$ ist, ist diese Aussage äquivalent zu $ff_a \in [E_a, G]$ ($a \in A$). Das ist aber wiederum nach (III) wegen $G \in \underline{U}$ äquivalent zu $ff_a \in [\Delta(E_a), G]$ ($a \in A$). Damit ist aber der erste

Teil der Behauptung bewiesen. Der zweite Teil ergibt sich unmittelbar aus der Voraussetzung der Existenz von Finalstrukturen in $\underline{K}$ und aus dem ersten Teil.

Als Folgerungen aus diesem Satz ergeben sich:

Da die Unterkategorien $\underline{HL}$ und $\underline{Top}$ von $\underline{L}$ sowie die Funktoren p und o die von der Unterkategorie $\underline{U}$ beziehungsweise vom Funktor Δ geforderten Eigenschaften besitzen und $\underline{L}$ eine Kategorie vom selben Typ wie $\underline{K}$ ist, führen p und o induktive Limes und Quotientenräume wieder in induktive Limes und Quotientenräume im Sinne der Bildkategorie über. Insbesondere erhält man:

(7.11) Corollar: Sei $(E_a, t_a)_{a \in A}$ ein induktives System von Limes-Räumen. Dann ist $(E_a, o_{E_a}(t_a))_{a \in A}$ ein induktives System von topologischen Räumen. Für den induktiven Limes dieses Systems in der Kategorie der topologischen Räume $(\underline{Lim}_>(\underline{Top}))$ gilt dann:

$\underline{Lim}_>(\underline{Top})(E_a, o_{E_a}(t_a)) = o(\underline{Lim}_>(\underline{L})(E_a, o_{E_a}(t_a)))$.
Insbesondere erhält man für ein induktives System von topologischen Räumen $(E_a, T_a)_{a \in A}$:

$$\underline{Lim}_>(\underline{Top})(E_a, T_a) = o(\underline{Lim}_>(\underline{L})(E_a, T_a)).$$

Für die Quotientenlimitierung läßt sich aufgrund von (7.10) Folgendes aussagen:

(7.12) Corollar: Sei (E_1, t_1) ein Limes-Raum, E sei eine nichtleere Menge, $f_1: E_1 \rightarrow E$ sei eine surjektive Abbildung. Ferner sei $T_1 = o_{E_1}(t_1)$. Zudem seien t_Q die Quotientenlimitierung auf E bezüglich f_1 und (E_1, t_1) sowie T_Q die Quotiententopologie auf E bezüglich f_1

und (E, T_1) . Dann gilt $T_Q = o_E(t_Q)$.

Die Beweise für die beiden Corollare sind trivial, da induktive Limes und Quotientenräume für topologische Räume universell eindeutig definiert sind und die oben angegebenen Strukturen auf Grund von (7.10) die universellen Bedingungen erfüllen.

Es kann nun untersucht werden, wann der Quotientenraum nach einem Limes-Raum und einer surjektiven Abbildung dem ersten Trennungsaxiom genügt.

(7.13)Satz: Sei (E_1, t_1) ein Limes-Raum, E sei eine nichtleere Menge, $f_1: E_1 \longrightarrow E$ sei eine surjektive Abbildung, t_Q sei die Quotientenlimitierung auf E bezüglich der Abbildung f_1 und dem Limes-Raum (E_1, t_1) . Der Quotientenraum (E, t_Q) genügt genau dann der (T_1) -Bedingung, wenn für jedes y aus E die Menge $f_1^{-1}(y)$ in E_1 t_1 -abgeschlossen ist.

Beweis: Nach (5.4) und (5.5) genügt t_Q genau dann der (T_1) -Bedingung, wenn $o_E(t_Q)$ der (T_1) -Bedingung genügt. Mit der Bezeichnungsweise von (7.12) gilt aber $o_E(t_Q) = T_Q$. T_Q genügt aber genau dann der (T_1) -Bedingung, wenn für jedes y aus E die Menge $f_1^{-1}(y)$ bezüglich T_1 abgeschlossen ist. Wegen $T_1 = o_{E_1}(t_1)$ ist diese Aussage äquivalent dazu, daß $f_1^{-1}(y)$ t_1 -abgeschlossen ist.

8. Limitierte Vektorräume.

Im Folgenden sei K stets der Körper der reellen Zahlen R oder der komplexen Zahlen C versehen mit der natürlichen Topologie T_{nat} . Es sei $\mathcal{V}$ der Nullumgebungsfilter in K . E sei ein Vektorraum über K . Die algebraische Struktur von E werde nicht besonders gekennzeichnet. $\alpha: E \times E \longrightarrow E$ sei die Additionsabbildung ($\alpha(x, y) = x + y$), $\mu: K \times E \longrightarrow E$ sei die Skalarmultiplikationsabbildung ($\mu(\lambda, x) = \lambda \cdot x$). Für jede reelle Zahl $r > 0$ sei definiert:

$$\begin{aligned} S(0, r] &= \{ \lambda / \lambda \in K, |\lambda| \leq r \} \\ S(0, r[&= \{ \lambda / \lambda \in K, |\lambda| < r \} \end{aligned}$$

Man erkennt sofort, daß $\{S(0, r] / r > 0\}$, $\{S(0, r[/ r > 0\}$, $\{S(0, 1/n] / n \in \mathbb{N}\}$ und $\{S(0, 1/n[/ n \in \mathbb{N}\}$ Filterbasen von $\mathcal{V}$ bilden. (Hierbei sei $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ die Menge der natürlichen Zahlen.)

(8.1) Definition: E sei ein K -Vektorraum, t sei eine Limitierung auf E . Das geordnete Paar (E, t) werde limitierter Vektorraum genannt, wenn gilt:

- (a) $\alpha: (E \times E, t \times t) \longrightarrow (E, t)$
- (b) $\mu: (K \times E, T_{\text{nat}} \times t) \longrightarrow (E, t)$.

Die Limitierung t auf E wird in diesem Falle "mit der Linearstruktur von E verträglich" oder "kompatibel" genannt.

Für die Untersuchung eines Satzes von H.R.Fischer über limitierte Gruppen, die im Folgenden angestellt werden soll, wird noch die Definition einer limitierten Gruppe benötigt.

Es sei G eine Gruppe. $\lambda: G \times G \longrightarrow G$ sei die Gruppenkomposition ($\lambda(x,y) = xy$), $i: G \longrightarrow G$ sei die Inversenabbildung ($i(x) = x^{-1}$).

(8.1 a) Definition: G sei eine Gruppe, t sei eine Limitierung auf G . Das geordnete Paar (G, t) werde limitierte Gruppe genannt, wenn gilt:

$$(a) \quad \lambda: (G \times G, t \times t) \longrightarrow (G, t)$$

$$(b) \quad i: (G, t) \longrightarrow (G, t) \quad .$$

Wie sich in der Theorie der topologischen Vektorräume die Vektorraumtopologie vollständig durch Eigenschaften des Nullumgebungsfilters kennzeichnen läßt, so läßt sich die Limitierung eines limitierten Vektorraumes ebenfalls durch Eigenschaften der Filterklasse $t(o)$ charakterisieren.

(8.2) Satz: (E, t) sei ein limitierter Vektorraum. Dann gilt:

(LV I) Aus $\tilde{f}_1 \in t(o)$ und $\tilde{f}_2 \in t(o)$ folgt

$$\tilde{f}_1 + \tilde{f}_2 := \alpha(\tilde{f}_1, \tilde{f}_2) \in t(o) \quad .$$

(LV II) Aus $\tilde{f}_1 \in t(o)$ folgt $\forall \tilde{f}_1 := \mu(\mathbb{W}, \tilde{f}_1) \in t(o)$.

(LV III) Für jedes x aus E gilt:

$$\mathbb{W}.x := \mathbb{W}.[x] := \mu(\mathbb{W}, [x]) \in t(o) \quad .$$

(LV IV) Für λ aus K und $\tilde{f}_1$ aus $t(o)$ gilt:

$$\lambda.\tilde{f}_1 := [\lambda].\tilde{f}_1 := \mu([\lambda], \tilde{f}_1) \in t(o) \quad .$$

Beweis: (LV I): Seien $\tilde{f}_1$ und $\tilde{f}_2$ aus $t(o)$. Dann gilt nach Definition der Produktlimitierung:

$\tilde{f}_1 \times \tilde{f}_2 \in (t \times t)(o, o)$. Wegen der Stetigkeit der Addition α folgt:

$$\tilde{f}_1 + \tilde{f}_2 = \alpha(\tilde{f}_1, \tilde{f}_2) = \alpha(\tilde{f}_1 \times \tilde{f}_2) \in t(o) \quad .$$

(LV II): Die Skalarmultiplikation μ ist in $(0, o)$ stetig.

Für $\mathcal{F}_1$ aus $t(o)$ folgt nach Definition der Produktlimitierung $\forall x \mathcal{F}_1 \in (T_{\text{nat}}xt)(0,o)$ und mithin

$$\forall. \mathcal{F}_1 = \wedge (\forall x \mathcal{F}_1) \in t(o) .$$

(LV III) : Aus der Stetigkeit der Skalarmultiplikation im Punkte $(0,x)$ folgt wegen $[x] \in t(x)$ und mithin wegen $\forall x [x] \in (T_{\text{nat}}xt)(0,x)$

$$\forall. x = \forall. [x] = \wedge (\forall x [x]) \in t(o) .$$

(LV IV) : Aus der Stetigkeit der Skalarmultiplikation im Punkte (λ, o) folgt wegen $[\lambda] \in T_{\text{nat}}(\lambda)$ für jeden Filter $\mathcal{F}_1$ aus $t(o)$ nach Definition der Produktlimitierung : $[\lambda]x \mathcal{F}_1 \in (T_{\text{nat}}xt)(\lambda, o)$ und

$$\lambda. \mathcal{F}_1 = [\lambda]. \mathcal{F}_1 = \wedge ([\lambda]x \mathcal{F}_1) \in t(o) .$$

(8.3) Satz: Sei (E, t) ein limitierter Vektorraum . Dann sind die Translationen $x \longrightarrow x+a$ ($a \in E$) und die Homothetien $x \longrightarrow \lambda x$ ($\lambda \in K, \lambda \neq 0$) Homöomorphismen von (E, t) .

Beweis: Da zu jedem dieser beiden Abbildungstypen die inversen Abbildungen existieren und vom selben Typ sind, genügt es folglich zu zeigen, daß die Abbildungen stetig sind.

1) Für a aus E definiere man eine Abbildung $j_a: E \longrightarrow ExE$ durch $j_a(x) = (x, a)$. Es gilt dann $j_a: (E, t) \longrightarrow (ExE, txt)$, denn die Limitierung txt ist die Initiallimitierung auf ExE bezüglich der Projektionen pr_1 und pr_2 von ExE auf E und die identische Abbildung $1_E = pr_1 j_a$ und die konstante Abbildung $pr_2 j_a$ sind stetig . Die Translation $x \longrightarrow x+a$ ist aber die Abbildung αj_a , die als Komposition von stetigen Abbildungen stetig ist.

2) Für $\lambda \neq 0$ sei die Abbildung $j_\lambda : E \longrightarrow K \times E$ definiert durch $j_\lambda(x) = (\lambda, x)$. Dann gilt nach einer Betrachtung, die analog zu der in (1) angestellten verläuft, $j_\lambda : (E, t) \longrightarrow (K \times E, T_{\text{nat}} x t)$. Wegen der Stetigkeit der Multiplikation folgt $\mu j_\lambda : (E, t) \longrightarrow (E, t)$.

Da aber die Abbildung μj_λ mit der Abbildung $x \longrightarrow \lambda x$ identisch ist, ist die Behauptung bewiesen. Auf Grund von (8.3) kann man nun jede Filterklasse $t(x)$ wie folgt durch die Filterklasse $t(o)$ darstellen: (8.4) Satz: Sei (E, t) ein limitierter Vektorraum. Dann gilt für jedes a aus E stets

$$t(a) = \{ \mathcal{F} + a / \mathcal{F} \in t(o) \}.$$

Beweis: Wegen der Homöomorphieeigenschaft der Abbildung

$x \longrightarrow x - a$ gilt $\mathcal{G} \in t(a)$ genau dann, wenn

$\mathcal{F} := \mathcal{G} - a \in t(o)$ gilt.

Es werde nun untersucht, wie man sich mit Hilfe der Eigenschaften (LV I) - (LV IV) für eine Filterklasse $s(o)$ auf E eine Limitierung t auf E derart konstruieren kann, daß (E, t) ein limitierter Vektorraum ist.

(8.5) Satz: Sei E ein K -Vektorraum. Ferner sei $s(o)$ eine nichtleere Familie von Filtern auf E , die den Bedingungen (LV I) - (LV IV) sowie den Bedingungen (i') Aus $\mathcal{F} \in s(o)$ und $\mathcal{G} \in s(o)$ folgt $\mathcal{F} \wedge \mathcal{G} \in s(o)$. (ii') Aus $\mathcal{F} \in s(o)$ und $\mathcal{G} \cong \mathcal{F}$ folgt $\mathcal{G} \in s(o)$. genügt. Dann gibt es auf E eine eindeutig bestimmte Limitierung t derart, daß (E, t) ein limitierter Vektorraum ist und $t(o) = s(o)$ gilt.

Beweis: Definiere $t : E \longrightarrow \mathcal{P}(\text{IF}(E))$ durch :

$$(x \in E) \quad t(x) := \{ \mathcal{F} + x / \mathcal{F} \in s(o) \}.$$

Vor der Verifikation der Limitierungsaxiome für t werde bemerkt, daß für $\lambda = 0$ und $\mathcal{F}$ aus $s(0)$ wegen (LV IV) die Relation

(iii') $0. \mathcal{F} = [0] \in s(0)$ folgt.

(i) Seien $\mathcal{G}_1$ und $\mathcal{G}_2$ aus $t(x)$. Dann gilt $\mathcal{G}_1 = \mathcal{F}_1 + x$ und $\mathcal{G}_2 = \mathcal{F}_2 + x$ mit $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \in s(0)$. Wegen (i') ist $\mathcal{F}_1 \wedge \mathcal{F}_2 \in s(0)$. Dann folgt

$$\mathcal{G}_1 \wedge \mathcal{G}_2 = (\mathcal{F}_1 \wedge \mathcal{F}_2) + x \in t(x).$$

(ii) Sei $\mathcal{G}_1$ aus $t(x)$. Ferner gelte $\mathcal{G}_2 \geq \mathcal{G}_1$. Dann folgt $\mathcal{G}_2 - x \geq \mathcal{G}_1 - x$. Nach Konstruktion von t ist $\mathcal{G}_1 - x$ aus $s(0)$, d.h., wegen (ii') auch $\mathcal{G}_2 - x$. Also ist $\mathcal{G}_2 \in t(x)$.

(iii) Da nach (iii') $[0] \in s(0)$ gilt, folgt:

$$[x] = [0] + x \in t(x).$$

Es werde nun die Kompatibilität der Limitierung t nachgewiesen. Hierbei seien $pr_i: ExE \longrightarrow E$ ($i = 1, 2$) die Projektionen $(x_1, x_2) \longrightarrow x_i$.

a) Stetigkeit der Addition α :

Seien (x, y) aus ExE und $\mathcal{F}$ aus $(txt)(x, y)$. Setze $\mathcal{F}_1 := pr_1(\mathcal{F})$ und $\mathcal{F}_2 := pr_2(\mathcal{F})$. Nach Definition der Produktlimitierung und (6.6) gilt $\mathcal{F} \geq \mathcal{F}_1 x \mathcal{F}_2$ und $\mathcal{F}_1 x \mathcal{F}_2 \in (txt)(x, y)$ sowie $\mathcal{F}_1 \in t(x)$ und $\mathcal{F}_2 \in t(y)$, d.h., $\mathcal{F}_1 - x \in t(0)$ ($= s(0)$) und $\mathcal{F}_2 - y \in t(0)$. Dann folgt nach (LV I)

$$\alpha(\mathcal{F}) - (x+y) \geq \alpha(\mathcal{F}_1 x \mathcal{F}_2) - (x+y) = \mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2 - (x+y) =$$

$$= (\mathcal{F}_1 - x) + (\mathcal{F}_2 - y) \in t(0).$$

Nach Definition von t folgt dann aber $\alpha(\mathcal{F}) \in t(x+y)$. Demnach ist die Addition stetig.

b) Stetigkeit der Skalarmultiplikation μ :

Seien $pr^1: KxE \longrightarrow K$ und $pr^2: KxE \longrightarrow E$ die durch

durch das kartesische Produkt in natürlicher Weise definierten Projektionen. Seien ferner (λ, x) aus $K \times E$ und g aus $(T_{\text{nat}} x t)(\lambda, x)$. Das ist genau dann der Fall, wenn gilt $\text{pr}^1(g) \in W + \lambda$ und $g_2 := \text{pr}^2(g) \in t(x)$. Es ist $g_2 := g_{2-x} \in t(o)$. Dann gilt $g \in (V + \lambda)x(g_{2+x})$. Also folgt

$$\begin{aligned} \mu(g) &\in \mu((V + \lambda)x(g_{2+x})) = (V + \lambda) \cdot (g_{2+x}) = \\ &= Vg_2 + \lambda g_2 + V \cdot x + \lambda \cdot x \end{aligned}$$

Wegen (LV I) - (LV IV) folgt dann aber

$$\mu((V + \lambda)x(g_{2+x})) \in t(\lambda \cdot x)$$

und mithin $\mu(g) \in t(\lambda \cdot x)$, d.h., μ ist stetig.

Wegen $t(o) = s(o)$ und (8.4) folgt die Eindeutigkeit der Limitierung t .

(8.6) Corollar: t_1 und t_2 seien kompatible Limitierungen auf E . $t_1 \leq t_2$ gilt genau dann, wenn gilt: $t_1(o) \subseteq t_2(o)$.

Es erhebt sich nun die Frage, welche Zusammenhänge zwischen limitierten und topologischen Vektorräumen bestehen, beziehungsweise, wann ein limitierter Vektorraum topologisch ist. Eine Antwort darauf gibt der folgende Satz:

(8.7) Satz (Fischer): Der limitierte Vektorraum (E, t) ist genau dann ein topologischer Vektorraum, wenn die Limitierung t eine Hauptideallimitierung ist.

Beweis: Offensichtlich ist die Bedingung notwendig, da jede Topologie eine Hauptideallimitierung ist.

Es werde nun gezeigt, daß die Bedingung hinreichend ist. Sei $\mathcal{N}(o)$ der Nullumgebungsfilter in E bezüglich der kompatiblen Hauptideallimitierung t .

Dann gilt für den Umgebungsfilter $\mathcal{A}(x)$ eines Punktes x aus E : $\mathcal{A}(x) = \mathcal{A}(o) + x$, denn nach (8.4) ist

$$\begin{aligned} t(x) &= \{f+x / f \in t(o)\} = \{f+x / f \geq \mathcal{A}(o)\} = \\ &= \{g / g \geq \mathcal{A}(o) + x\} . \end{aligned}$$

Daraus erhält man, daß die Umgebungsfilter der Hauptideallimitierung t durch Translationen auseinander hervorgehen. Der Nullumgebungsfilter $\mathcal{A}(o)$ besitzt folgende weitere Eigenschaften :

(I) Aus (LV I) und der Eigenschaft von t , Hauptideallimitierung zu sein, folgt $\mathcal{A}(o) + \mathcal{A}(o) \geq \mathcal{A}(o)$.

Demnach gibt es zu jeder Menge W aus $\mathcal{A}(o)$ eine Menge V aus $\mathcal{A}(o)$ derart, daß gilt $V+V \subseteq W$.

(II) Da für jedes $\lambda \neq 0$ die Abbildung $x \longrightarrow \lambda x$ ein Homöomorphismus und da t eine Hauptideallimitierung ist, folgt aus (LV IV) $\lambda \mathcal{A}(o) = \mathcal{A}(o)$, d.h., mit jedem V aus $\mathcal{A}(o)$ und jedem $\lambda \neq 0$ ist auch λV aus $\mathcal{A}(o)$.

(III) Aus (LV II) und der Voraussetzung, daß t eine Hauptideallimitierung ist, folgt $\bigvee \mathcal{A}(o) \geq \mathcal{A}(o)$.

Hieraus folgt für jedes V aus $\mathcal{A}(o)$ die Existenz einer positiven Zahl r und einer Menge W aus $\mathcal{A}(o)$ derart, daß $S(0,r].W \subseteq V$ gilt. Wegen (II) folgt $r.W \in \mathcal{A}(o)$. Wegen $r.W \subseteq S(0,1].r.W = S(0,r].W$ folgt $S(0,r].W \in \mathcal{A}(o)$. Die Menge $S(0,r].W$ ist equilibriert, sie ist in V enthalten . Demnach gibt es zu jeder Menge V aus $\mathcal{A}(o)$ eine equilibrierte Menge U aus $\mathcal{A}(o)$ mit $U \subseteq V$.

(IV) Aus (LV III) folgt insbesondere für jedes x aus E

$\forall x \in \mathcal{A}(o)$, d.h., jede Menge aus $\mathcal{A}(o)$ absorbiert jeden Punkt aus E .

Die Bedingungen (I) - (IV) sind nach [3] zusammen mit der zuvor gezeigten Translationseigenschaft der Umgebungsfiler notwendig und hinreichend dafür, daß $\mathcal{A}(o)$ der Nullumgebungsfiler einer Vektorraumtopologie und t folglich eine Vektorraumtopologie auf E ist.

Die hier für limitierte Vektorräume gewonnenen Ergebnisse besitzen folgende Analoga in der Theorie der limitierten Gruppen:

Man beweist unter Benützung der Bezeichnungsweisen $\mathcal{K}(\mathcal{F} \times \mathcal{G}) = \mathcal{F} \cdot \mathcal{G}$ und $i(\mathcal{F}) = \mathcal{F}^{-1}$ in Analogieschlüssen die folgenden Ergebnisse:

(8.2a)Satz: (G, t) sei eine limitierte Gruppe, e sei das neutrale Element aus G . Dann gilt:

(LG I) Aus $\mathcal{F}_1 \in t(e)$ und $\mathcal{F}_2 \in t(e)$ folgt $\mathcal{F}_1 \cdot \mathcal{F}_2 \in t(e)$.

(LG II) Aus $\mathcal{F} \in t(e)$ folgt $\mathcal{F}^{-1} \in t(e)$.

(8.5a)Satz: Sei G eine Gruppe. Ferner sei $s(e)$ eine nichtleere Familie von Filtern auf G , die den Bedingungen (LG I) und (LG II) sowie

(i' a) Aus $\mathcal{F} \in s(e)$ und $\mathcal{G} \in s(e)$ folgt $\mathcal{F} \wedge \mathcal{G} \in s(e)$.

(ii' a) Aus $\mathcal{F} \in s(e)$ und $\mathcal{G} \supseteq \mathcal{F}$ folgt $\mathcal{G} \in s(e)$.

genügt. Dann gibt es auf G eine eindeutig bestimmte Limitierung t derart, daß (G, t) eine limitierte Gruppe ist und $t(e) = s(e)$ gilt .

(8.7a)Satz (Fischer) : Die limitierte Gruppe (G, t) ist genau dann eine topologische Gruppe, wenn die Limitierung t eine Hauptideallimitierung ist .

Vergißt man bei einem limitierten Vektorraum die Skalarmultiplikation, so erhält man eine limitierte abelsche Gruppe.

Auf Grund des Satzes (8.7a) hat Fischer versucht zu beweisen, daß für jede limitierte Gruppe (G, t) auch der topologische Raum $o(G, t) = (G, o_G(t))$ eine topologische Gruppe ist, indem er $p(G, t) = (G, p_G(t))$ bildete und die Kompatibilität von $p_G(t)$ mit der Gruppenstruktur von G nachzuweisen versuchte. Der Beweis dieses Satzes enthält jedoch einen Fehler. So stellt sich die Frage, ob $p_G(t)$ und $o_G(t)$ mit der Gruppenstruktur verträglich sind. Mit Hilfe der Theorie der limitierten Vektorräume soll diese Frage untersucht werden.

Ist (E, t) ein limitierter K -Vektorraum, so können für $p_E(t)$ und $o_E(t)$ die folgenden Ergebnisse formuliert werden:

(8.8)Satz: Sei (E, t) ein limitierter Vektorraum. Dann sind die Addition und die Skalarmultiplikation auf E bezüglich der Hauptideallimitierung $p_E(t)$ und der Topologie $o_E(t)$ komponentenweise stetig.

Beweis: Nach (8.1) sind für a aus E und λ aus K die Abbildungen $x \longrightarrow x+a$, $x \longrightarrow \lambda x$ von E in E beziehungsweise $\beta \longrightarrow \beta.a$ von K in E stetige Abbildungen bezüglich der Limitierung t auf E und der Topologie T_{nat} auf K . Die Abbildungen bleiben nach Anwendung der Funktoren p und o stetig, wenn man insbesondere berücksichtigt, daß bei der letzten Abbildung die Funktoren p und o die Topologie T_{nat} reproduzieren.

(8.9)Bemerkung: Die Abbildungen $x \longrightarrow x+a$ und $x \longrightarrow \lambda \cdot x$ ($\lambda \neq 0$) besitzen inverse Abbildungen, die vom selben Typus, also auch stetig sind bezüglich der Hauptideallimitierung $p_E(t)$ beziehungsweise bezüglich der Topologie $o_E(t)$. Folglich sind diese Abbildungen bezüglich $p_E(t)$ und $o_E(t)$ Homöomorphismen. Hieraus folgt:

(8.10)Satz: Sei (E, t) ein limitierter Vektorraum.

$\mathcal{A}(x)$ sei der Umgebungsfiler des Punktes x aus E bezüglich der Hauptideallimitierung $p_E(t)$. $\mathcal{U}(x)$ sei der Umgebungsfiler von x bezüglich der Topologie $o_E(t)$. Dann gilt:

$$(I) \quad \mathcal{A}(x) = \mathcal{A}(o) + x \quad \mathcal{U}(x) = \mathcal{U}(o) + x .$$

$$(II) \quad \lambda \mathcal{A}(o) \supseteq \mathcal{A}(o) \quad \lambda \mathcal{U}(o) \supseteq \mathcal{U}(o)$$

für λ aus K .

$$(III) \quad \forall x \supseteq \mathcal{A}(o) \quad \forall x \supseteq \mathcal{U}(o)$$

für x aus E .

Insbesondere resultiert aus (I), daß die Hauptideallimitierung $p_E(t)$ beziehungsweise die Topologie $o_E(t)$ eindeutig durch die Vorgabe der Filter $\mathcal{A}(o)$ und $\mathcal{U}(o)$ definiert sind. Genauer kann man sogar sagen: Die Hauptideallimitierung $p_E(t)$ ist sogar wegen

$\mathcal{A}(o) = \bigwedge_{f \in \mathcal{F}} f$ eindeutig durch die Filterklasse $t(o)$ definiert. Analog ist auch die Topologie $o_E(t)$ eindeutig durch die Filterklasse $t(o)$ bestimmt. Eine Menge G in E ist nämlich genau dann bezüglich $o_E(t)$ offen, wenn G entweder leer ist oder wenn für jedes x aus G folgt: $G \in \mathcal{A}(x) = \mathcal{A}(o) + x$. Demnach ist G bezüglich $o_E(t)$ genau dann offen, wenn für jedes x aus G gilt: $G - x \in \mathcal{A}(o)$.

Die Topologie $\mathcal{O}_E(t)$ ist demnach eindeutig durch die Filterklasse $t(o)$ bestimmt. (Diese Aussage folgt auch daraus, daß t nach (8.5) eindeutig durch $t(o)$ bestimmt ist.) Aus diesen Betrachtungen folgt, daß man sich bei der Untersuchung der Kompatibilität von $p_E(t)$ und $\mathcal{O}_E(t)$ auf die Untersuchung der Bedingungen (LV I) - (LV IV) beschränken darf. Werden diese Bedingungen nämlich erfüllt, so folgt nach (8.10) und (8.5), daß die Limitierung $p_E(t)$ respektive die Topologie $\mathcal{O}_E(t)$ kompatibel sind.

Von Frölicher und Bucher [6] wird eine spezielle Klasse von limitierten Vektorräumen untersucht, die auch im Folgenden eine gewisse Rolle spielen wird, nämlich die Klasse der gleichförmig limitierten Vektorräume (" equable pseudotopological vector spaces "). Sie sind wie folgt definiert:

(8.11) Definition: E sei ein Vektorraum, $\mathcal{G}$ sei ein Filter auf E . $\mathcal{G}$ heiße gleichförmig, wenn gilt: $\forall \mathcal{G} = \mathcal{G}$. (E, t) heiße gleichförmig limitierter Vektorraum, wenn es zu $\mathcal{F}$ aus $t(o)$ stets einen gleichförmigen Filter $\mathcal{G}$ aus $t(o)$ mit $\mathcal{F} \supseteq \mathcal{G}$ gibt.

(8.12) Satz: Sei (E, t) ein gleichförmig limitierter Vektorraum, $\mathcal{N}(o)$ sei der Nullumgebungsfilter bezüglich der Hauptideallimitierung $p_E(t)$. Dann gilt $\bigvee \mathcal{N}(o) = \mathcal{N}(o)$. Insbesondere genügt dann mit den Aussagen von (8.10) die Limitierung $p_E(t)$ den Bedingungen (LV II) - (LV IV).

Beweis: Sei $t^+(o) = \{ \mathcal{G} / \mathcal{G} \in t(o), \forall \mathcal{G} = \mathcal{G} \}$.

Dann ist $\bigwedge_{\mathcal{G} \in t^+(o)} \mathcal{G} \supseteq \mathcal{N}(o)$. Andererseits gibt es

zu jedem Filter $\mathcal{F}$ aus $t(o)$ einen Filter $\mathcal{G}$ aus $t^+(o)$

derart, daß gilt $\mathcal{F} \cong \mathcal{G}$. Hieraus folgt

$$\mathcal{N}(0) = \bigwedge_{\mathcal{F} \in \mathcal{F}} \mathcal{F} \cong \bigwedge_{\mathcal{G} \in \mathcal{G}} \mathcal{G} \quad \text{und mithin}$$

$\bigwedge_{\mathcal{G} \in \mathcal{G}} \mathcal{G} = \mathcal{N}(0)$. Es werde nun gezeigt, daß der Filter $\mathcal{N}(0)$ der Bedingung $\forall \mathcal{N}(0) = \mathcal{N}(0)$ genügt. Das geschieht

dadurch, daß man die von Frölicher und Bucher hergeleitete Charakterisierung der gleichförmigen Filter nachweist: Es gilt $\forall \mathcal{N}(0) = \mathcal{N}(0)$ genau dann, wenn für jedes λ aus K ($\lambda \neq 0$) und jedes V aus $\mathcal{N}(0)$ gilt:

$\lambda \cdot V \in \mathcal{N}(0)$ und wenn es ferner zu jeder Menge V aus $\mathcal{N}(0)$ eine equilibrierte Menge V' aus $\mathcal{N}(0)$ derart gibt, daß gilt: $V' = S(0,1] \cdot V' \subseteq V$. ([6], p.16).

Wegen der Darstellung $\mathcal{N}(0) = \bigwedge_{\mathcal{G} \in \mathcal{G}} \mathcal{G}$ gilt für jedes V aus $\mathcal{N}(0)$:

$$V = \bigcup_{\mathcal{G} \in \mathcal{G}} G_{\mathcal{G}} \quad (G_{\mathcal{G}} \in \mathcal{G}).$$

Für jedes $\lambda \neq 0$ und für jedes $G_{\mathcal{G}}$ aus $\mathcal{G}$ resultiert wegen $\forall \mathcal{G} = \mathcal{G}$ auch $\lambda G_{\mathcal{G}} \in \mathcal{G}$. Dann folgt aber:

$$\lambda \cdot V = \lambda \cdot \left(\bigcup_{\mathcal{G} \in \mathcal{G}} G_{\mathcal{G}} \right) = \bigcup_{\mathcal{G} \in \mathcal{G}} (\lambda \cdot G_{\mathcal{G}}) \in \mathcal{N}(0).$$

Zu jedem $G_{\mathcal{G}}$ gibt es ferner wegen $\forall \mathcal{G} = \mathcal{G}$ eine equilibrierte Menge $G'_{\mathcal{G}}$ aus $\mathcal{G}$ mit $G'_{\mathcal{G}} \subseteq G_{\mathcal{G}}$. Dann gilt

$$V' := \bigcup_{\mathcal{G} \in \mathcal{G}} G'_{\mathcal{G}} \in \mathcal{N}(0) \quad \text{und}$$

$$V' = \bigcup_{\mathcal{G} \in \mathcal{G}} (S(0,1] \cdot G'_{\mathcal{G}}) = S(0,1] \cdot \left(\bigcup_{\mathcal{G} \in \mathcal{G}} G'_{\mathcal{G}} \right) =$$

$$= S(0,1] \cdot V' \subseteq V. \quad \text{Damit ist die Behauptung bewiesen.}$$

In der Untersuchung des zu stellenden Problems werden - wie schon angedeutet - die Trennungsaxiome auf limitierten Vektorräumen eine wesentliche Rolle spielen. Hierbei ist die auf Fischer zurückgehende Verallgemeinerung des Satzes, daß Vektorräume, die dem (T_1) -Axiom

genügen, auch separiert sind, von Bedeutung.

(8.13)Satz: Sei (E, t) ein limitierter Vektorraum, der dem (T_1) - Axiom genügt. Dann ist (E, t) separiert.

Beweis: Annahme: (E, t) sei nicht separiert, genüge aber der (T_1) -Bedingung. Wegen der (T_1) -Bedingung gilt für x und y aus E mit $x \neq y$ stets $[x] \not\subseteq t(y)$. Da (E, t) nicht separiert sein soll, existieren x und y aus E mit $x \neq y$ und $t(x) \cap t(y) \neq \emptyset$. Es gibt also einen Filter $\mathcal{F}$ auf E , der in $t(x) \cap t(y)$ liegt, d.h., der bezüglich der Limitierung t sowohl gegen x als auch gegen y konvergiert. Dann muß aber der Filter $\mathcal{G} := \mathcal{F} - x$ bezüglich der Limitierung t sowohl gegen 0 als auch gegen $z := y - x$ konvergieren: $\mathcal{G} \in t(0) \cap t(z)$ ($z \neq 0$). Aus (LV I) und (LV IV) folgt dann aber $\mathcal{G} - \mathcal{G} \in t(0)$ und andererseits $\mathcal{G} - \mathcal{G} \in t(z)$. Nun gilt aber, wie man sofort nachrechnet, $[0] \supseteq \mathcal{G} - \mathcal{G}$. Wegen der Limitierungsaxiome folgt dann $[0] \in t(z)$, was gegen die Voraussetzung, daß t dem (T_1) - Axiom genügt, verstößt. Die Annahme ist also zu einem Widerspruch zur Voraussetzung geführt worden. Demnach ist jeder limitierte Vektorraum, der der (T_1) -Bedingung genügt, auch separiert.

Es liegt nun nahe - in Analogie zu den topologischen Vektorräumen - den limitierten Vektorräumen als Morphismen die stetigen, linearen Abbildungen zuzuordnen, um so zu einer Kategorie zu gelangen. Für die stetigen linearen Abbildungen läßt sich ebenfalls der folgende Satz aus der Theorie der topologischen Vektorräume übertragen:

(8.14)Satz: Seien (E, t) und (F, s) limitierte Vektorräume, $f: E \longrightarrow F$ sei eine lineare Abbildung. Es gilt $f: (E, t) \longrightarrow (F, s)$ genau dann, wenn f in o stetig ist.

Beweis: Die Bedingung ist offensichtlich notwendig.

Sie ist aber auch hinreichend. Sei nämlich x aus E beliebig und $\mathcal{F}$ aus $t(x)$. Dann gibt es einen Filter

$\mathcal{G}$ aus $t(o)$ derart, daß $\mathcal{F} = \mathcal{G} + x$ gilt. Dann folgt wegen der Additivität von f : $f(\mathcal{F}) = f(\mathcal{G}) + f(x)$. Da f in o stetig ist, gilt $f(\mathcal{G}) \in s(o)$ und somit $f(\mathcal{F}) = f(\mathcal{G}) + f(x) \in s(f(x))$, d.h., f ist stetig.

Problem: Auf Grund von (8.7a) stellte Fischer [4] die Frage: Wenn (G, t) eine limitierte Gruppe ist, ist dann $(G, o_G(t))$ eine topologische Gruppe? Er wollte das mit (8.7a) beweisen, indem er zu zeigen versuchte, daß $p_G(t)$ mit der Gruppenstruktur verträglich ist. Leider enthielt Fischers Beweis einen Fehler - Frölicher und Bucher [6] weisen darauf hin - , so daß bisher nichts über die Richtigkeit des Fischerschen Ergebnisses ausgesagt werden konnte. Frölicher und Bucher formulierten die Frage für limitierte Vektorräume : Sei (E, t) ein limitierter Vektorraum. Sind dann $p_E(t)$ oder $o_E(t)$ mit der Linearstruktur von E kompatibel? Wäre dies der Fall, so wäre $(E, o_E(t))$ bzw. $(E, p_E(t))$ nach (8.7) ein topologischer Vektorraum. Das heißt, falls sich die Frage bejahend beantworten ließe, ließe sich jedem limitierten Vektorraum (E, t) in einfacher konstruktiver Weise ein topologischer Vektorraum vermöge dem Funktor p beziehungsweise vermöge dem Funktor o zuordnen.

Dieser topologische Vektorraum müßte dann nach (5.5) und (8.13) separiert sein, wenn (E, t) separiert ist. Es ist ein Ziel dieser Arbeit zu zeigen, daß im allgemeinen $p_E(t)$ und $o_E(t)$ nicht mit der linearen Struktur verträglich sein müssen, ja, daß sogar auf jedem unendlichdimensionalen Vektorraum eine kompatible gleichförmige Limitierung existiert, deren nächstgrößere Hauptideallimitierung ebenso wie die nächstgrößere Topologie nicht mit der Linearstruktur verträglich sind. Genauer wird gezeigt werden: Falls für jede kompatible separierte Limitierung auf einem K -Vektorraum die nächstgrößere Hauptideallimitierung oder die nächstgrößere Topologie kompatibel sind, muß der Vektorraum endlichdimensional sein. Diese Behauptung wird durch die Konstruktion eines Gegenbeispiels für unendlichdimensionale Vektorräume und den Beweis des Satzes von Tychonoff für endlichdimensionale, separierte, limitierte Vektorräume geführt. Das Gegenbeispiel wird gleichzeitig beweisen, daß das von Fischer für limitierte Gruppen aufgeworfene Problem im allgemeinen negativ zu beantworten ist.

Das gewünschte Gegenbeispiel benötigt insbesondere die Begriffe der induktiven Limites in verschiedenen Kategorien von Vektorräumen. In diesem Zusammenhang sollen diese Begriffe genauer untersucht werden. Es wird eine Charakterisierung des induktiven Limes eines Systems von topologischen Vektorräumen in einer noch zu entwickelnden Theorie der Kategorie der limitierten Vektorräume angegeben werden. Gleichzeitig wird sich in diesem

Zusammenhang die Frage nach der Struktur von endlich-dimensionalen, separierten, limitierten Vektorräumen ergeben, auf die man als Antwort die schon oben erwähnte Verallgemeinerung des Satzes von Tychonoff erhält.

Man erkennt nun sofort, daß die Klasse aller limitierten K -Vektorräume mit den stetigen linearen Abbildungen als Morphismen und der Hintereinanderausführung der stetigen, linearen Abbildungen als Morphismenverknüpfung eine Kategorie bildet.

(8.15)Definition: Die Kategorie aller limitierten K -Vektorräume werde mit LKV bezeichnet. Die Kategorie aller topologischen K -Vektorräume werde mit TopKV bezeichnet. Das Symbol für die Kategorie aller lokal-konvexen K -Vektorräume sei LkKV.

Wegen (8.7) stimmt die Kategorie aller K -Vektorräume mit kompatibler Hauptideallimitierung mit TopKV überein. Sie braucht also nicht besonders gekennzeichnet zu werden.

Man erkennt nun weiter: Betrachtet man in den soeben ausgezeichneten Kategorien nur die Objekte, die zusätzlich das Axiom (T_2) erfüllen, so erhält man hierdurch volle Unterkategorien der soeben ausgezeichneten Kategorien.

Im Folgenden sollen nun zwei Funktoren aus LKV in LkKV beziehungsweise in TopKV definiert werden, die bei der Behandlung der gestellten Probleme ein wesentliches Hilfsmittel darstellen werden.

(8.16)Satz: Sei (E, t) ein limitierter Vektorraum.

Dann existiert auf E eine eindeutig bestimmte lokal-konvexe Vektorraumtopologie $p_E^0(t)$ derart, daß für jeden lokalkonvexen Vektorraum (F, S) und jede lineare Abbildung $f: E \longrightarrow F$ die folgenden beiden Aussagen äquivalent sind:

a) $f: (E, t) \longrightarrow (F, S)$

b) $f: (E, p_E^0(t)) \longrightarrow (F, S)$.

Beweis: Sei $\Gamma(E, t)$ die Familie aller auf E definierten und bezüglich der Limitierung t stetigen Halbnormen . Die Familie $\Gamma(E, t)$ ist nichtleer, da sie das Nullfunktional enthält, das als konstante Abbildung stets stetig ist. $\Gamma(E, t)$ ist ferner eine gerichtete Familie von Halbnormen auf E , denn sind q_1 und q_2 aus $\Gamma(E, t)$, so ist wegen der Stetigkeit der Addition in R auch die Halbnorm $q_1 + q_2$ aus $\Gamma(E, t)$ und es gilt $q_1, q_2 \leq q_1 + q_2$. Man definiere nun $p_E^0(t)$ als die durch die Familie $\Gamma(E, t)$ auf E definierte lokalkonvexe Vektorraumtopologie. Es werde nun $l_E: (E, t) \longrightarrow (E, p_E^0(t))$ bewiesen. Für q aus $\Gamma(E, t)$ folgt wegen (4.8) aus $q: (E, t) \longrightarrow (R, T_{\text{nat}})$ stets $q: (E, o_E(t)) \longrightarrow (R, T_{\text{nat}})$. Demnach ist die Initialtopologie auf E , die durch die Halbnormen der Familie $\Gamma(E, t)$ erzeugt wird und mit der Topologie $p_E^0(t)$ identisch ist, gröber als die Topologie $o_E(t)$: $o_E(t) \leq p_E^0(t)$. Hieraus folgt aber nach (4.8) und (4.1) $l_E: (E, t) \longrightarrow (E, p_E^0(t))$. Insbesondere folgt dann aber aus der Voraussetzung (b) und $(E, t) \xrightarrow{l_E} (E, p_E^0(t)) \xrightarrow{f} (F, S)$ die Behauptung (a). Es werde nun vorausgesetzt, daß $f: (E, t) \longrightarrow (F, S)$

Es sei ferner $\bigcap (F, S)$ die Familie aller stetigen Halbnormen auf (F, S) . Die Aussage $f: (E, t) \longrightarrow (F, S)$ ist dann, da die lokalkonvexe Topologie S Initialstruktur auf E für die Funktionenfamilie $\bigcap (F, S)$ ist, äquivalent zu der Aussage, daß für jede Halbnorm q' aus $\bigcap (F, S)$ gilt: $q'f: (E, t) \longrightarrow (R, T_{\text{nat}})$, d.h., $q'f \in \bigcap (E, t)$, da wegen der Linearität von f die Abbildung $q'f$ eine Halbnorm auf E ist. Die Familie von Halbnormen $\bigcap_f (E, t) := \{q'f / q' \in \bigcap (F, S)\}$ erzeugt auf E die lokalkonvexe Initialstruktur bezüglich der linearen Abbildung f und dem lokalkonvexen Raum (F, S) . Wie soeben gezeigt wurde, folgt aus $f: (E, t) \longrightarrow (F, S)$ die Relation $\bigcap_f (E, t) \leq \bigcap (E, t)$, d.h., die von $\bigcap_f (E, t)$ auf E erzeugte lokalkonvexe Topologie ist schwächer als die Topologie $p_E^0(t)$. Da $\bigcap_f (E, t)$ die Initialtopologie auf E bezüglich f und (F, S) erzeugt, muß nach (4.3) gelten $f: (E, p_E^0(t)) \longrightarrow (F, S)$.

Die Eindeutigkeit der lokalkonvexen Topologie $p_E^0(t)$ folgt unter Annahme der Existenz einer weiteren Topologie T auf E , die lokalkonvex ist und die Äquivalenz der Aussagen (a) und (b) bewirkt, aus dem folgenden Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & \xrightarrow{1_E} & (E, T) \xrightarrow{1_E} (E, T) \\
 & \nearrow^{1_E} & & & \\
 (E, t) & & \xrightarrow{\quad \quad} & & \\
 & \searrow_{1_E} & & \downarrow^{1_E} & \\
 & & (E, p_E^0(t)) \xrightarrow{\quad \quad} & (E, p_E^0(t)) & .
 \end{array}$$

(8.17) Bemerkung: Im allgemeinen folgt aus der Separiertheit der Limitierung t noch lange nicht die Separiertheit der lokalkonvexen Topologie $p_E^0(t)$, die wegen

ihrer universellen Charakterisierung " die zu t nächstgrößere lokalkonvexe Topologie " auf E genannt wird. Ein Beispiel hierfür bieten die Lebesgueschen Räume L^p ($0 < p < 1$). Diese Räume sind separierte, topologische Vektorräume, also erst recht separierte, limitierte Vektorräume. Die nächstgrößere lokalkonvexe Topologie zu der üblichen Topologie ist aber die indiskrete Topologie. (c.f. [10]) .

(8.18)Definition: Sei (E, t) ein limitierter K -Vektorraum. Mit E' werde der Raum aller linearen Funktionale (mit Werten in K) auf E bezeichnet. $(E, t)^*$ sei der Raum aller bezüglich der Limitierung t stetigen, linearen Funktionale auf E . Dann folgt aus (8.16) unmittelbar:

(8.19)Satz: Es gilt : $(E, t)^* = (E, p_E^0(t))^*$.

(8.20)Definition: Es sei E ein K -Vektorraum. Eine Teilmenge S' von E' heiße total, wenn für x aus E und aus der Relation $\langle x, s' \rangle = 0$ für alle s' aus S' folgt : $x = 0$.

(8.21)Satz: Der Raum $(E, p_E^0(t))$ ist genau dann separiert, wenn $(E, t)^*$ total ist. Insbesondere ist dann auch (E, t) separiert.

Beweis: Bezeichnet man die schwache Topologie auf E , die durch $(E, p_E^0(t))^*$ definiert wird, mit $\sigma(E, (E, p_E^0(t))^*)$, so ist, wie man mit Hilfe des Satzes von Hahn und Banach leicht beweist, $(E, p_E^0(t))$ genau dann separiert, wenn $(E, \sigma(E, (E, p_E^0(t))^*))$ separiert ist, d.h., wenn $(E, p_E^0(t))^*$ total ist. Wegen (8.19) folgt dann der erste Teil der Behauptung. Nach (8.16) folgt aus $l_E: (E, t) \rightarrow (E, p_E^0(t))$ die Relation $t \leq p_E^0(t)$. Nach (5.4) folgt dann die

die Separiertheit von t .

(8.22)Satz: Seien (E, t) und (F, s) limitierte Vektorräume. Ferner sei $f: (E, t) \longrightarrow (F, s)$ linear. Dann gilt auch $f: (E, p_E^o(t)) \longrightarrow (F, p_F^o(s))$.

Beweis: Die Behauptung folgt aus dem aus (8.16) resultierenden Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} (E, t) & \xrightarrow{f} & (F, s) & \xrightarrow{1_F} & (F, p_F^o(s)) \\ & \searrow 1_E & & & \nearrow f \\ & & (E, p_E^o(t)) & \xrightarrow{f} & \end{array}$$

Die Sätze (8.16) und (8.22) geben nun Anlaß zu der folgenden Definition:

(8.23)Definition: Durch

$$p^o(E, t) := (E, p_E^o(t))$$

$$p^o(f: (E, t) \longrightarrow (F, s)) := f: (E, p_E^o(t)) \longrightarrow (F, p_F^o(s))$$

ist ein Funktor $p^o: \underline{\text{LKV}} \longrightarrow \underline{\text{LkKV}}$ wohldefiniert. Der Funktor p^o ist auf der vollen Unterkategorie LkKV von LKV idempotent, da für jeden lokalkonvexen Raum (E, T) gilt: $(E, T) = (E, p_E^o(T))$, wie man sofort aus (8.16) errechnet.

Man kann nun jeder kompatiblen Limitierung nicht nur die nächstgrößere lokalkonvexe Topologie zuordnen, es läßt sich sogar zu jeder kompatiblen Limitierung stets die Existenz der nächstgrößeren kompatiblen Topologie nachweisen, was im Folgenden geschehen soll.

(8.24)Satz: Sei (E, t) ein limitierter Vektorraum. Dann gibt es auf E eine eindeutig bestimmte lineare, d.h., mit der Linearstruktur von E verträgliche Topologie $p_E^1(t)$ derart, daß für jeden topologischen

Vektorraum (F, S) und jede lineare Abbildung $f: E \longrightarrow F$ die folgenden beiden Aussagen äquivalent sind:

- a) $f: (E, t) \longrightarrow (F, S)$
- b) $f: (E, p_E^1(t)) \longrightarrow (F, S)$.

Beweis: Sei $O(E, t)$ die Familie aller linearen Topologien auf E , die gröber als t sind. Es gilt $O(E, t) \neq \emptyset$, da die indiskrete Topologie auf E mit der linearen Struktur verträglich und gröber als t , folglich also in $O(E, t)$ enthalten ist. Man bilde nun in der Kategorie TopKV das Produkt $(E^B, T^B) := \prod_{T \in O(E, t)} (E, T)$, das nach bekannten Sätzen der Theorie der topologischen Vektorräume und nach (6.7) mit dem Produkt in $\underline{L}$ identisch ist. Ferner sei $\Delta: (E, t) \longrightarrow (E^B, T^B)$ die Diagonalabbildung. Δ ist eine lineare Abbildung. Man definiert nun $p_E^1(t)$ als die von Δ und (E^B, T^B) auf E induzierte lineare Initialtopologie. Für die Abbildung l_E gilt $l_E: (E, t) \longrightarrow (E, p_E^1(t))$ genau dann, wenn gilt $\Delta l_E: (E, t) \longrightarrow (E^B, T^B)$. Das ist aber nach Definition von (E^B, T^B) genau dann der Fall, wenn für jede lineare Topologie T aus $O(E, t)$ und die Projektion pr_T gilt: $pr_T \Delta l_E: (E, t) \longrightarrow (E, T)$. Nun ist aber $pr_T \Delta l_E = l_E$. Ferner gilt wegen $T \in O(E, t)$ stets $l_E: (E, t) \longrightarrow (E, T)$. Dann folgt aber $l_E: (E, t) \longrightarrow (E, p_E^1(t))$. Setzt man nun (b) voraus, so folgt daraus unmittelbar die Behauptung (a). Es gelte nun die Behauptung (a). Diese Aussage ist nach (8.14) äquivalent dazu, daß f in o stetig ist. Wenn $\mathcal{U}(o)$ der Nullumgebungsfilter von (F, S)

ist, so bedeutet dies, daß für jeden Filter $\mathcal{F}$ aus $t(o)$ gelten muß : $f(\mathcal{F}) \cong \mathcal{U}(o)$. Hieraus folgt $\mathcal{F} \cong f^{-1}(f(\mathcal{F})) \cong f^{-1}(\mathcal{U}(o))$. Nun ist aber $f^{-1}(\mathcal{U}(o))$ Nullumgebungsfilter der linearen Initialtopologie T_f auf E bezüglich dem topologischen Vektorraum (F, S) und der linearen Abbildung f . Aus der vorangegangenen Filterungleichung und aus (8.6) folgt : $t \leq T_f$, d.h., $T_f \in O(E, t)$. Nun gilt $f:(E, T_f) \longrightarrow (F, S)$ und $l_E = \text{pr}_{T_f} \triangle: (E, p_E^1(t)) \longrightarrow (E, T_f)$, also $f:(E, p_E^1(t)) \longrightarrow (F, S)$.

Die Eindeutigkeit der Topologie $p_E^1(t)$ wird ebenso wie die Eindeutigkeit von $p_E^0(t)$ in (8.16) bewiesen.

(8.25)Corollar: Ist insbesondere t schon eine lineare Topologie, so folgt aus (8.24) unmittelbar, daß $p_E^1(t) = t$ gelten muß.

(8.26)Satz: Seien (E, t) und (F, s) limitierte Vektorräume, $f:(E, t) \longrightarrow (F, s)$ sei linear . Dann gilt $f:(E, p_E^1(t)) \longrightarrow (F, p_F^1(s))$.

Beweis: Mit (8.24) erhält man :

$$\begin{array}{ccccc} (E, t) & \xrightarrow{f} & (F, s) & \xrightarrow{l_F} & (F, p_F^1(s)) \\ & \searrow l_E & & \nearrow f & \\ & & (E, p_E^1(t)) & & \end{array} .$$

(8.27)Definition: Nach (8.24) und (8.26) ist der Funktor $p^1: \underline{\text{LKV}} \longrightarrow \underline{\text{TopKV}}$ wie folgt wohldefiniert:

Für jeden limitierten Vektorraum (E, t) sei :

$$p^1(E, t) := (E, p_E^1(t)) .$$

Für jede stetige lineare Abbildung des limitierten Vektorraumes (E, t) in den limitierten Vektorraum (F, s) sei

$p^1(f:(E,t) \longrightarrow (F,s)) := f:(E,p_E^1(t)) \longrightarrow (F,p_F^1(s))$.

(8.28)Bemerkung: Die Charakterisierung von $p_E^1(t)$ in (8.24) legt nahe, $p_E^1(t)$ als die zu t nächstgrößere, lineare Topologie zu bezeichnen. Für jeden limitierten Vektorraum gilt dann, wie man sofort verifiziert, die folgende Kette von Ungleichungen :

$$t \leq p_E(t) \leq o_E(t) \leq p_E^1(t) \leq p_E^o(t) .$$

Insbesondere folgt wegen der Charakterisierung der Topologien $p_E^1(t)$ und $p_E^o(t)$, daß für jeden limitierten Vektorraum gelten muß : $p_E^o(p_E^1(t)) = p_E^o(t)$. Hieraus resultiert, daß der Funktor p^o sich in folgender Weise über den Funktor p^1 faktorisieren läßt :

$$\begin{array}{ccc} & p^o & \\ & \text{-----} & \\ \text{LKV} & \xrightarrow{\quad} & \text{LkKV} \\ p^1 \swarrow & & \nearrow p^o \\ & \text{TopKV} & \end{array} .$$

Das bereits angeschnittene Problem der Kompatibilität der nächstgrößeren Topologie $o_E(t)$ mit der Vektorraumstruktur im Falle eines vorgegebenen limitierten Vektorraumes (E,t) beziehungsweise die der nächstgrößeren Hauptideallimitierung $p_E(t)$ mit der Vektorraumstruktur kann nun wegen des Vorangegangenen wie folgt formuliert werden:

Genau dann ist stets zu einem limitierten Vektorraum (E,t) die Topologie $o_E(t)$ mit der linearen Struktur von E verträglich, wenn gilt $o_E(t) = p_E^1(t)$, d.h. , wenn die Einschränkung des Funktors o auf die Unterkategorie LKV mit dem Funktor p^1 übereinstimmt . Wegen (8.7) ist $p_E(t)$ sogar genau dann stets mit der Vektorraumstruktur von E verträglich, wenn sogar

die Einschränkungen der Funktoren o und p auf LKV mit p^1 übereinstimmen.

Der Beweis dafür, daß sie nicht übereinstimmen, wird durch ein Gegenbeispiel geliefert. Hierfür wird aber noch einiges über induktive Limites von limitierten Vektorräumen benötigt.

9. Induktive Limites in LKV , TopKV , LkKV und

Quotientenräume.

(9.1)Satz: Sei $(E_a, t_a)_{a \in A}$ ein induktives System von limitierten Vektorräumen. Dann ist der induktive Limes $t_F := \varinjlim (\underline{L}) t_a$ der kompatiblen Limitierungen t_a mit der Vektorraumstruktur von $E := \bigcup_{a \in A} E_a$ kompatibel.

Beweis: Es genügt wegen (8.4) und (8.5) nachzuweisen, daß die Filterklasse $t_F(o)$ den Kompatibilitätsbedingungen (LV I) - (LV IV) genügt und daß für x aus E gilt: $t_F(x) = \{f+x / f \in t_F(o)\}$.

(LV I) Seien f_1 und f_2 aus $t_F(o)$. Dann gibt es Indizes a und b aus A und Filter g_1 aus $t_a(o)$ sowie g_2 aus $t_b(o)$ derart, daß gilt $f_1 = j_a(g_1)$ und $f_2 = j_b(g_2)$. Da A gerichtet ist, gibt es c aus A mit $a, b \leq c$. Insbesondere folgt aus der Stetigkeit der Abbildungen j_{ac} und j_{bc} , daß $j_{ac}(g_1) \in t_c(o)$ und $j_{bc}(g_2) \in t_c(o)$ gilt. Ferner ist $j_c(j_{ac}(g_1)) = j_a(g_1) = f_1$ und $j_c(j_{bc}(g_2)) = j_b(g_2) = f_2$. Da t_c mit der Linearstruktur von E_c verträglich ist, folgt

$j_{ac}(g_1) + j_{bc}(g_2) \in t_c(o)$. Dann gilt aber $j_c(j_{ac}(g_1) + j_{bc}(g_2)) = j_c j_{ac}(g_1) + j_c j_{bc}(g_2) = f_1 + f_2 \in t_F(o)$. Hieraus folgt die Behauptung.

(LV II) Sei f aus $t_F(o)$. Dann gibt es einen Index a aus A und einen Filter g aus $t_a(o)$ mit $f = j_a(g)$. Da t_a mit der Linearstruktur von E_a verträglich ist, folgt $\forall g \in t_a(o)$. Dann ist aber wegen der Linearität der Einbettungsabbildungen:

$$\mathbb{W}f = \mathbb{W}j_a(g) = j_a(\mathbb{W}g) \in t_F(o) .$$

(LV III) Sei x aus E . Dann gibt es einen Index a aus A derart, daß $x \in E_a$ gilt. Wegen der Verträglichkeit von t_a mit der Vektorraumstruktur von E_a gilt in E_a : $\mathbb{W}.x \in t_a(o)$. Dann gilt in E wegen der Linearität von j_a : $\mathbb{W}.x = \mathbb{W}.j_a(x) = j_a(\mathbb{W}.x) \in t_F(o)$.

(LV IV) Seien f aus $t_F(o)$ und λ aus K . Dann gibt es a aus A und g aus $t_a(o)$ derart, daß $f = j_a(g)$ gilt. Dann folgt $\lambda f = \lambda.j_a(g) = j_a(\lambda.g) \in t_F(o)$, da t_a mit der Linearstruktur von E_a kompatibel ist.

Es werde nun noch die Relation $t_F(x) = \{f+x / f \in t_F(o)\}$

bewiesen. Sei $g \in t_F(x)$. Dann gibt es a aus A und h aus $t_a(x)$ mit $g = j_a(h)$. Da t_a mit der Vektorraumstruktur von E_a kompatibel ist, gibt es ℓ aus $t_a(o)$ derart, daß $h = \ell + x$ gilt. Dann gilt nach Definition von t_F : $j_a(\ell) \in t_F(o)$ und $g = j_a(h) = j_a(\ell + x) = j_a(\ell) + x$. Sei andererseits f aus $t_F(o)$. Dann gibt es einen Index b aus A und einen Filter g' aus $t_b(o)$ mit

$$f = j_b(g'). \text{ Sei } c \text{ aus } A \text{ derart, daß } a, b \leq c$$

gilt. Wegen der Stetigkeit von j_{bc} ist $j_{bc}(g') \in t_c(o)$.

Ferner ist wegen $a \leq c$ auch $x \in E_c$. Da t_c kompatibel ist, ist $j_{bc}(g') + x \in t_c(x)$. Dann folgt nach Definition von t_F :

$$\begin{aligned} j_c(j_{bc}(g') + x) &= j_c j_{bc}(g') + x = j_b(g') + x = \\ &= f + x \in t_F(x) . \end{aligned}$$

Also ist $\text{Lim}_{>}(\underline{L}) t_a = t_F$ mit der Linearstruktur von E verträglich.

(E, t_F) ist induktiver Limes der limitierten Vektorräume (E_a, t_a) in der Kategorie $\underline{L}$. Dieser Limes ist nach (9.1) wieder ein limitierter Vektorraum. Das heißt: Die Bildung des induktiven Limes eines induktiven Systems aus LKV führt nicht aus LKV heraus. Es gilt der folgende Satz, der (E, t_F) auch als induktiven Limes des vorgegebenen Systems in der Kategorie LKV kennzeichnet:

(9.2)Satz: Sei $(E_a, t_a)_{a \in A}$ ein induktives System von limitierten Vektorräumen. Dann ist $t_F := \underline{\text{Lim}}_{>}(\underline{L}) t_a$ eindeutig gekennzeichnet als die Limitierung t auf $E := \bigcup_{a \in A} E_a$, für die gilt: Sei (F, s) ein limitierter Vektorraum, $f: E \rightarrow F$ sei eine lineare Abbildung. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- a) $f: (E, t) \rightarrow (F, s)$
- b) $f j_a: (E_a, t_a) \rightarrow (F, s) \quad (a \in A)$.

Beweis: Da (E, t_F) ein limitierter Vektorraum ist und für t_F insbesondere (7.2) gilt, folgt die Äquivalenz der Aussagen. Die Eindeutigkeit folgt hier nach demselben Schluß wie im Beweis von (7,2).

Aus diesem Grunde kann man vom induktiven Limes von $(E_a, t_a)_{a \in A}$ in der Kategorie LKV sprechen und definieren:

(9.3)Definition: Sei $(E_a, t_a)_{a \in A}$ ein induktives System von limitierten Vektorräumen. Dann definiert man:

$$\underline{\text{Lim}}_{>}(\underline{\text{LKV}}) (E_a, t_a) := \underline{\text{Lim}}_{>}(\underline{L}) (E_a, t_a)$$

und

$$\underline{\text{Lim}}_{>}(\underline{\text{LKV}}) t_a := \underline{\text{Lim}}_{>}(\underline{L}) t_a.$$

Ist nun $(E_a, t_a)_{a \in A}$ ein induktives System von limitier-

ten Vektorräumen, so sind nach Definition der Funktoren p^0 und p^1 die Systeme $(p^1(E_a, t_a))_{a \in A}$ und $(p^0(E_a, t_a))_{a \in A}$ induktive Systeme von topologischen beziehungsweise lokalkonvexen Vektorräumen. Da nun aber TopKV und LkKV volle Unterkategorien von LKV sind und - wie man sofort verifiziert - die Funktoren p^1 und p^0 die Voraussetzungen von (7.10) erfüllen, erhält man :

(9.4)Corollar: Es gilt :

$$\lim_{\rightarrow} (\text{TopKV})(E_a, p_{E_a}^1(t_a)) = p^1(\lim_{\rightarrow} (\text{LKV})(E_a, p_{E_a}^1(t_a)))$$

und

$$\lim_{\rightarrow} (\text{LkKV})(E_a, p_{E_a}^0(t_a)) = p^0(\lim_{\rightarrow} (\text{LKV})(E_a, p_{E_a}^0(t_a))).$$

Insbesondere gilt für ein induktives System topologischer Vektorräume $(E_a, T_a)_{a \in A}$:

$$\lim_{\rightarrow} (\text{TopKV})(E_a, T_a) = p^1(\lim_{\rightarrow} (\text{LKV})(E_a, T_a))$$

sowie für ein induktives System lokalkonvexer Vektorräume $(E_a, S_a)_{a \in A}$:

$$\lim_{\rightarrow} (\text{LkKV})(E_a, S_a) = p^0(\lim_{\rightarrow} (\text{LKV})(E_a, S_a)) .$$

H.H.Keller (siehe [9]) hat für induktive Limites in LKV folgenden Satz bewiesen, der angibt, wann der induktive Limes eines Systems topologischer Vektorräume in LKV wieder ein topologischer Vektorraum ist:

(9.5)Satz: Sei $(E_a, T_a)_{a \in A}$ ein induktives System topologischer Vektorräume. Es ist $(E, t_F) := \lim_{\rightarrow} (\text{LKV})(E_a, T_a)$ genau dann ein topologischer Vektorraum, wenn die Folge $(E_a, T_a)_{a \in A}$ stationär wird, d.h., wenn es einen Index a_0 aus A derart gibt, daß für alle a aus A mit $a_0 \leq a$ stets $(E_a, T_a) = (E_{a_0}, T_{a_0})$ folgt.

Beweis: Die Folge $(E_a, T_a)_{a \in A}$ werde stationär. Definiere

nun $(E, t) := (E_{a_0}, T_{a_0})$. Sei a aus A beliebig. Da A gerichtet ist, gibt es einen Index b aus A mit $a, a_0 \leq b$. Wegen $a_0 \leq b$ folgt: $(E_b, T_b) = (E, t)$. Da das System induktiv ist, gilt $j_{ab}: (E_a, T_a) \longrightarrow (E_b, T_b)$. Wegen $E_b = E$ kann man definieren: $j_a := j_{ab}$. Es gilt $j_a: (E_a, T_a) \longrightarrow (E, t)$. Für jeden Index a aus A und jede stetige, lineare Abbildung f von (E, t) in einen limitierten Vektorraum (F, s) folgt dann aber $fj_a: (E_a, T_a) \longrightarrow (F, s)$. Gilt andererseits für jeden Index a aus A : $fj_a: (E_a, T_a) \longrightarrow (F, s)$, so folgt insbesondere für $a = a_0$ wegen $j_{a_0} = l_{E_{a_0}} = l_E$ und $t = T_{a_0}$: $f: (E, t) \longrightarrow (F, s)$. Also ist $t_F = t = T_{a_0}$. Damit ist der erste Teil der Behauptung bewiesen.

Sei nun andererseits $t_F = T$ eine lineare Topologie.

$\mathcal{U}(0)$ sei der Nullumgebungsfilter in E bezüglich der Topologie T . Da $\mathcal{U}(0)$ bezüglich T ein gegen 0 konvergenter Filter ist, muß es nach Konstruktion des induktiven Limes in LKV respektive in L einen Index a aus A und einen bezüglich T_a gegen 0 konvergenten Filter $\mathcal{U}_a$ derart geben, daß gilt

$\mathcal{U}(0) = j_a(\mathcal{U}_a)$. Es ist nun $E_a \in \mathcal{U}_a$ und mithin auch $E_a \in j_a(\mathcal{U}_a) = \mathcal{U}(0)$. Da E_a ein Vektorraum ist, gilt dann für jedes x aus E_a : $E_a - x = E_a \in \mathcal{U}(0)$. Diese Aussage ist aber auf limitierten Vektorräumen äquivalent dazu, daß E_a T -offen ist (siehe (8.10)). T ist eine lineare Topologie. Demnach ist E_a ein offener Unterraum von (E, T) . Da aber jeder topologische Vektorraum nur sich selbst als offenen Unterraum

enthalten kann, muß $E_a = E$ gelten. Dann gilt aber $j_a = l_E$ und somit $\mathcal{U}_{(0)} = \mathcal{U}_a$. Wegen $\mathcal{U}_a \in T_a(0)$ folgt nach (4.4) und (8.14) : $l_E : (E, T) \longrightarrow (E, T_a)$.

Andererseits gilt aber, da eine Inklusionsabbildung eines induktiven Systems vorliegt :

$$j_a = l_E : (E, T_a) \longrightarrow (E, T) \text{ und folglich } T = T_a .$$

Für alle b aus A mit $a \leq b$ folgt aus der Eigenschaft von j_{ab} , Inklusionsabbildung zu sein

$E_a \subseteq E_b \subseteq E = E_a$, also $E_a = E_b = E$. Aus der Voraussetzung über die Induktivität des Systems folgt ferner:

$$j_{ab} = l_E : (E, T) \longrightarrow (E, T_b) \text{ und } j_b = l_E : (E, T_b) \longrightarrow (E, T) ,$$

d.h., $T = T_b$. Damit ist aber bewiesen, daß die Folge stationär wird.

Aus diesem Satz folgt nunmehr, daß jedes induktive System von linearen, topologischen Räumen genau dann einen echten limitierten Vektorraum erzeugt, wenn es nicht stationär, d.h., nicht trivial ist.

Es sollen nun die induktiven Limites von topologischen beziehungsweise lokalkonvexen Vektorräumen in LKV charakterisiert werden. Hierzu ist die folgende Hilfsbetrachtung nötig:

(9.6) Lemma: Sei E ein K -Vektorraum, $\mathcal{G}$ sei ein Filter auf E mit den folgenden Eigenschaften:

$$\mathcal{G} + \mathcal{G} = \mathcal{G} \quad \text{und} \quad \forall \mathcal{G} = \mathcal{G} .$$

Dann ist $E_{\mathcal{G}} := \bigcap_{G \in \mathcal{G}} KG$ ein Unterraum von E .

Beweis: Seien x aus $E_{\mathcal{G}}$ und λ aus K . Für jedes G aus $\mathcal{G}$ gilt $x \in KG$. Es folgt $\lambda x \in \lambda KG \subseteq KG$.

Hieraus folgt $\lambda x \in \bigcap_{G \in \mathcal{G}} KG = E_{\mathcal{G}}$.

Seien x und y aus $E_{\mathcal{G}}$. Dann gilt für jedes G

aus $\mathcal{G} : x \in KG \text{ und } y \in KG$. Wegen $\bigvee \mathcal{G} = \mathcal{G}$ und $\mathcal{G} + \mathcal{G} = \mathcal{G}$ gibt es eine equilibrierte Menge G' aus $\mathcal{G}$ derart, daß $G' + G' \subseteq G$ gilt. Ferner ist $x \in KG'$ und $y \in KG'$. Da G' equilibriert ist, gibt es $\alpha, \beta > 0$ derart, daß gilt $\alpha x \in G', \beta y \in G'$. Wähle nun $r := \min(\alpha, \beta)$. Dann gilt wegen der Equilibriertheit von G' auch $rx \in G'$ und $ry \in G'$, also $r(x+y) \in G' + G' \subseteq G$, folglich $x+y \in KG$. Da G aus $\mathcal{G}$ beliebig war, folgt $x+y \in \bigcap_{G \in \mathcal{G}} KG = E_{\mathcal{G}}$. $E_{\mathcal{G}}$ ist also ein Unterraum von E .

(9.7) Satz: (E, t) sei ein limitierter Vektorraum. Notwendig und hinreichend dafür, daß (E, t) induktiver Limes in LKV eines induktiven Systems topologischer Vektorräume ist, ist die Existenz einer Filterfamilie $\mathcal{Q}$ auf E , die den folgenden Bedingungen genügt:

(1) Für jedes $\mathcal{G}$ aus $\mathcal{Q}$ gilt:

- (a) $\mathcal{G} \in t(0)$
- (b) $\mathcal{G} + \mathcal{G} = \mathcal{G}$
- (c) $\bigvee \mathcal{G} = \mathcal{G}$.

(2) Zu jedem Filter $\mathcal{F}$ aus $t(0)$ gibt es einen Filter $\mathcal{G}$ aus $\mathcal{Q}$ mit $\mathcal{F} \supseteq \mathcal{G}$.

(3) Es gilt für jeden Filter $\mathcal{G}$ aus $\mathcal{Q}$ stets $\bigcap_{G \in \mathcal{G}} KG \in \mathcal{G}$.

Beweis: Die Bedingung ist notwendig. Sei $(E_a, T_a)_{a \in A}$ ein induktives System von topologischen Vektorräumen.

$\mathcal{U}_a$ sei der Nullumgebungsfilter in (E_a, T_a) . Ferner sei $(E, t) = \varinjlim (\text{LKV})(E_a, T_a)$. Wie man leicht nachrechnet, ist ein Filter $\mathcal{F}$ auf E genau dann in $t(0)$, wenn es einen Index a aus A derart gibt, daß gilt:

$\mathcal{F} \cong j_a(\mathcal{U}_a)$. Wegen der Relationen $\mathcal{U}_a = \bigvee \mathcal{U}_a$ und $\mathcal{U}_a + \mathcal{U}_a = \mathcal{U}_a$ auf E_a folgt auf Grund der Linearität von j_a :

$$\bigvee j_a(\mathcal{U}_a) = j_a(\mathcal{U}_a) \quad \text{und} \quad j_a(\mathcal{U}_a) + j_a(\mathcal{U}_a) = j_a(\mathcal{U}_a).$$

Damit ist die Familie $\mathcal{Q}$ durch $\mathcal{Q} = \{j_a(\mathcal{U}_a) / a \in A\}$

definiert. Sie genügt, wie soeben gezeigt wurde, den Bedingungen (1) und (2). Sei ferner U_a aus $\mathcal{U}_a$.

Da U_a Nullumgebung in (E_a, T_a) ist, absorbiert U_a jeden Punkt aus E_a , d.h., es gilt $KU_a = E_a$. Da es

aber zu G aus $j_a(\mathcal{U}_a)$ stets U_a aus $\mathcal{U}_a$ mit

$U_a \subseteq G$ gibt, folgt $KU_a = E_a \subseteq KG$. Demnach gilt

auf jeden Fall $\bigcap_{G \in j_a(\mathcal{U}_a)} KG \supseteq E_a$. Andererseits ist

$$\text{aber} \quad E_a = \bigcap_{U_a \in \mathcal{U}_a} KU_a \supseteq \bigcap_{G \in j_a(\mathcal{U}_a)} KG. \quad \text{Da } \mathcal{U}_a$$

Filter auf E_a ist, ist $E_a \in \mathcal{U}_a$. Mithin gilt:

$$E_a = \bigcap_{G \in j_a(\mathcal{U}_a)} KG \in j_a(\mathcal{U}_a).$$

Damit ist auch (3) bewiesen und folglich gezeigt, daß die Bedingungen notwendig sind.

Es werde nun angenommen, daß (E, t) ein limitierter Vektorraum sei, der mit der Filterfamilie $\mathcal{Q}$ den Bedingungen (1) - (3) genüge.

Für jeden Filter $\mathcal{G}$ aus $\mathcal{Q}$ definiere $E_{\mathcal{G}} := \bigcap_{G \in \mathcal{G}} KG$.

Nach (9.6) ist $E_{\mathcal{G}}$ ein Unterraum von E .

(9.8) Behauptung: Es gilt für jeden Filter $\mathcal{G}$ aus $\mathcal{Q}$:

$$E_{\mathcal{G}} = \{x / x \in E, \bigvee x \cong \mathcal{G}\}.$$

Beweis: (I) Sei $\bigvee x \cong \mathcal{G}$. Dann gibt es zu jedem G aus $\mathcal{G}$ eine Zahl $r > 0$ derart, daß $S(0, r)x \subseteq G$ gilt.

Insbesondere ist dann $rx \in G$, folglich $x = \frac{1}{r}(rx) \in KG$.

Da G aus $\mathcal{G}$ beliebig war, folgt $x \in \bigcup_{G \in \mathcal{G}} KG = E_{\mathcal{G}}$. Also ist $\{x / x \in E, \forall x \cong \mathcal{G}\} \subseteq E_{\mathcal{G}}$.

Sei andererseits x aus E und G aus $\mathcal{G}$. Wegen der Relation $\forall \mathcal{G} = \mathcal{G}$ gibt es eine equilibrierte Menge G' aus $\mathcal{G}$ derart, daß $G' \subseteq G$ gilt. Es ist zu zeigen, daß $\forall x \cong \mathcal{G}$ ist, d.h., daß es zu G aus $\mathcal{G}$ eine Zahl $r > 0$ derart gibt, daß $S(0, r]x \subseteq G$ folgt. Wegen der Equilibriertheit von G' genügt es, die Existenz von $r > 0$ derart nachzuweisen, daß $rx \in G'$ gilt. Da G' equilibriert ist, folgt dann nämlich $S(0, 1]rx = S(0, r]x \subseteq G' \subseteq G$. Nach Definition ist $E_{\mathcal{G}} \subseteq KG'$. Da G' equilibriert ist, existiert $r > 0$ derart, daß $rx \in G'$ gilt, was zu beweisen war.

(9.9) Behauptung: Man versehe das vorgegebene Filtersystem mit der zur Filterordnung dualen Ordnung. So erhält man ein gerichtetes System. Bezüglich diesem System ist dann $\{E_{\mathcal{G}} / \mathcal{G} \in \Omega\}$ ein induktives System von Vektorräumen mit $E = \bigcup_{\mathcal{G} \in \Omega} E_{\mathcal{G}}$.

Beweis: Nach den Limitierungsaxiomen und nach den Voraussetzungen über Ω ist Ω gerichtet. Im Folgenden werde die zu Beginn eingeführte Filterordnung beibehalten. Es ist zu zeigen, daß aus $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2 \in \Omega$ und $\mathcal{G}_1 \cong \mathcal{G}_2$ folgt $E_{\mathcal{G}_1} \subseteq E_{\mathcal{G}_2}$. Nach (9.8) ist x genau dann aus $E_{\mathcal{G}_1}$, wenn $\forall x \cong \mathcal{G}_1$ gilt. Hieraus folgt $\forall x \cong \mathcal{G}_2$ nach Voraussetzung über $\mathcal{G}_1$ und $\mathcal{G}_2$. Also folgt nach (9.8) $x \in E_{\mathcal{G}_2}$ und somit $E_{\mathcal{G}_1} \subseteq E_{\mathcal{G}_2}$. Es bleibt die Relation $E = \bigcup_{\mathcal{G} \in \Omega} E_{\mathcal{G}}$ zu beweisen. Da (E, t) ein limitierter Vektorraum ist,

gilt für jedes x aus E $\forall x \in t(o)$. Nach den Voraussetzungen über Ω gibt es dann einen Filter $\mathcal{G}$ aus Ω derart, daß $\forall x \in \mathcal{G}$ gilt. Nach (9.8) folgt $x \in E_{\mathcal{G}}$ und erst recht $x \in \bigcup_{\mathcal{G} \in \Omega} E_{\mathcal{G}}$. Folglich ist, da die $E_{\mathcal{G}}$ alle in E enthalten sind, $E = \bigcup_{\mathcal{G} \in \Omega} E_{\mathcal{G}}$.

(9.10) Behauptung: Für die Spur des Filters $\mathcal{G}$ auf $E_{\mathcal{G}}$ gilt:

$$F_E(\text{Sp}_{E_{\mathcal{G}}}(\mathcal{G})) = \mathcal{G}.$$

Beweis: Das folgt aus der Relation $E_{\mathcal{G}} \in \mathcal{G}$.

(9.11) Behauptung: Setze für $\mathcal{G}$ aus Ω : $\tilde{\mathcal{G}} = \text{Sp}_{E_{\mathcal{G}}}(\mathcal{G})$. Dann gilt auf $E_{\mathcal{G}}$: $\tilde{\mathcal{G}} + \tilde{\mathcal{G}} = \tilde{\mathcal{G}}$ und $\forall \tilde{\mathcal{G}} = \tilde{\mathcal{G}}$.

Beweis: Seien G aus $\tilde{\mathcal{G}}$, $\lambda \neq 0$. Dann gilt wegen $\forall \mathcal{G} = \mathcal{G}$ auch $\lambda G \in \mathcal{G}$. Hieraus und aus $G \in E_{\mathcal{G}}$ folgt $\lambda G \in E_{\mathcal{G}}$, da $E_{\mathcal{G}}$ ein Vektorraum ist. Demnach folgt aus $G \in \tilde{\mathcal{G}}$ und $\lambda \neq 0$ auch $\lambda G \in \tilde{\mathcal{G}}$. Wenn $G \in \tilde{\mathcal{G}}$ gilt, so gibt es wegen $\forall \mathcal{G} = \mathcal{G}$ eine equilibrierte Menge G' aus $\mathcal{G}$ mit $G' \in G$. Aus $G \in \tilde{\mathcal{G}}$ und $G' \in G$ folgt dann aber $G' \in \tilde{\mathcal{G}}$. Die beiden soeben verifizierten Bedingungen sind aber notwendig und hinreichend dafür, daß $\forall \tilde{\mathcal{G}} = \tilde{\mathcal{G}}$ gilt.

Für jedes G aus $\tilde{\mathcal{G}}$ gilt wegen $\forall \mathcal{G} = \mathcal{G}$ stets $o \in G$. Daraus folgt: $\tilde{\mathcal{G}} \cong \tilde{\mathcal{G}} + \tilde{\mathcal{G}}$. Sei andererseits G aus $\tilde{\mathcal{G}}$. Wegen $\mathcal{G} + \mathcal{G} = \mathcal{G}$ gibt es G' aus $\mathcal{G}$ derart, daß $G' + G' \in G$ gilt. Da $o \in G'$, folgt insbesondere $G' = G' + o \in G' + G' \in G \subseteq E_{\mathcal{G}}$, d.h., $G' \in \tilde{\mathcal{G}}$. Hieraus folgt $\tilde{\mathcal{G}} + \tilde{\mathcal{G}} \subseteq \tilde{\mathcal{G}}$ und mithin $\tilde{\mathcal{G}} + \tilde{\mathcal{G}} = \tilde{\mathcal{G}}$.

(9.12) Definition: Definiere die Limitierung

$$t_{\mathcal{G}}: E \longrightarrow \mathcal{P}(\text{IF}(E_{\mathcal{G}})) \text{ durch:}$$

$$(x \in E_{\mathcal{G}}) \quad t_{\mathcal{G}}(x) = \{ \mathcal{F} / \mathcal{F} \in \text{IF}(E_{\mathcal{G}}), \mathcal{F} - x \in \tilde{\mathcal{G}} \}.$$

(9.13) Behauptung: Durch $t_{\mathcal{G}}$ ist auf dem linearen Raum

E_g eine kompatible Topologie definiert.

Beweis: Es werde zuerst nachgewiesen, daß durch t_g auf E_g eine kompatible Limitierung definiert ist. Hierzu genügt es nach Definition von t_g die Bedingungen (i') und (ii') sowie (LV I) - (LV IV) in (8.5) nachzuweisen, da die Filterklassen $t_g(x)$ nach Definition durch Translationen aus $t_g(o)$ hervorgehen. Die Bedingungen (i') und (ii') folgen unmittelbar daraus, daß t_g , falls sich (LV I) - (LV IV) verifizieren lassen, eine Hauptideallimitierung ist. Es bleibt der Nachweis von (LV I) - (LV IV).

(LV I) Es gelte $f_1 \in t(o)$ ($i = 1, 2$). Das ist äquivalent zu $f_i \geq \tilde{g}$. Dann folgt $f_1 + f_2 \geq \tilde{g} + \tilde{g} = 2\tilde{g}$, also $f_1 + f_2 \in t_g(o)$.

(LV II) Sei $f \in t_g(o)$. Dann folgt $\forall f \geq \tilde{g} = \tilde{g}$, also $\forall f \in t(o)$.

(LV III) Für jedes x aus E_g gilt nach (9.8)

$$\forall x \geq \tilde{g} \quad \text{und folglich} \quad \forall x \in t_g(o).$$

(LV IV) Seien λ aus K und f aus $t_g(o)$. Dann folgt $\lambda f \geq \lambda \tilde{g} \geq \tilde{g}$ und somit $\lambda f \in t_g(o)$.

Damit ist gezeigt, daß t_g eine kompatible Limitierung ist. Diese Limitierung ist aber eine Topologie, da sie nach Definition eine Hauptideallimitierung mit dem Nullumgebungsfilter $\tilde{g}$ ist. (Siehe (8.7)).

(9.14) Behauptung: Es gilt $(E, t) = \underline{\text{Lim}}_{>}(\underline{\text{LKV}})(E_g, t_g)$.

Beweis: Es genügt nach (8.5) zu beweisen, daß

$$t(o) = (\underline{\text{Lim}}_{>}(\underline{\text{LKV}}) t_g)(o) \text{ gilt.}$$

Sei $f \in t(o)$. Dann gibt es einen Filter g aus Ω derart, daß $f \geq g$ ist. Hieraus folgt $E_g \in f$

und $\text{Sp}_{E_g}(f) \cong \tilde{g}$, also $\text{Sp}_{E_g}(f) \in t_g(o)$. Dann resultiert aber wegen (9.10)

$F_E(\text{Sp}_{E_g}(f)) = j_{E_g}(\text{Sp}_{E_g}(f)) = f \in (\varinjlim (\text{LKV}) t_g)(o)$.
Sei andererseits $f \in (\varinjlim (\text{LKV}) t_g)(o)$. Dann gibt es g aus Ω und einen Filter $\mathcal{G}$ auf E_g mit $\mathcal{G} \cong \tilde{g}$ derart, daß gilt:

$f = j_{E_g}(\mathcal{G}) \cong j_{E_g}(\tilde{g}) = g$. Hieraus folgt aber $f \in t(o)$ auf Grund der Limitierungssaxiome.

(E, t) ist also induktiver Limes der topologischen Vektorräume $(E_g, t_g)_{g \in \Omega}$. Damit ist der Satz bewiesen.

Als Corollare hierzu ergeben sich:

(9.15) Corollar: Sei (E, t) induktiver Limes in LKV eines induktiven Systems topologischer Vektorräume. Dann ist (E, t) ein gleichförmig limitierter Vektorraum.

Beweis: Dies folgt unmittelbar aus den Eigenschaften der Familie Ω und der Definition eines gleichförmig limitierten Vektorraumes.

(9.16) Corollar: Ein limitierter Vektorraum (E, t) ist genau dann induktiver Limes einer induktiven Familie $(E_a, T_a)_{a \in A}$ von lokalkonvexen Vektorräumen, wenn eine Familie Ω von Filtern auf E existiert, die die folgenden Eigenschaften besitzt:

- (1) Wenn $g \in \Omega$, so
 - (a) $g \in t(o)$
 - (b) g besitzt eine Filterbasis aus absolutkonvexen Mengen.
 - (c) Für jeden Skalar λ aus K gilt $\lambda g \cong g$.

(2) Zu jedem Filter $\mathcal{F}$ aus $t(o)$ existiert ein Filter $\mathcal{G}$ aus Ω mit $\mathcal{F} \geq \mathcal{G}$.

(3) Für jeden Filter $\mathcal{G}$ aus Ω gilt $\bigcap_{G \in \mathcal{G}} KG \in \mathcal{G}$.

Beweis: Wenn (E, t) induktiver Limes eines Systems lokalkonvexer Vektorräume $(E_a, T_a)_{a \in A}$ ist, so definiere man die Familie Ω wie im Beweis von (9.7). Jeder Nullumgebungsfilter $\mathcal{U}_a$ besitzt, da (E_a, T_a) lokalkonvex sein soll, eine Filterbasis aus absolutkonvexen Mengen. Diese Basis ist dann aber auch eine Filterbasis für den Filter $F_E(\mathcal{U}_a)$. Demnach ist die Bedingung (1.b) erfüllt. Die Bedingung (1.a) stimmt mit der in (9.7) überein und gilt automatisch. Da $\mathcal{U}_a$ Nullumgebungsfilter in (E_a, T_a) ist, folgt für jeden Skalar λ aus K die Relation $\lambda \mathcal{U}_a \geq \mathcal{U}_a$. Hieraus folgt dann aber $\lambda F_E(\mathcal{U}_a) = F_E(\lambda \mathcal{U}_a) \geq F_E(\mathcal{U}_a)$. Also gilt auch (1.c). Die Bedingungen (2) und (3) sind mit denen in (9.7) identisch. Ist andererseits die Filterfamilie Ω so vorgegeben, daß die Bedingungen (1) - (3) erfüllt sind, so folgen die Bedingungen (1.b) und (1.c) - wie man sehr leicht verifiziert - auch für die in (9.11) definierten Filter $\tilde{\mathcal{G}}$ auf $E_{\mathcal{G}}$. Dann ist aber nach der Definition eines lokalkonvexen Vektorraumes $\tilde{\mathcal{G}}$ Nullumgebungsfilter einer lokalkonvexen Topologie auf $E_{\mathcal{G}}$, die mit $t_{\mathcal{G}}$ übereinstimmt. Nach (9.7) gilt $t = \varinjlim (\text{LKV}) t_{\mathcal{G}}$. In diesem Kapitel, in dem die Kompatibilität gewisser Finalstrukturen auf limitierten Vektorräumen mit der Vektorraumstruktur untersucht werden soll, wurden bisher nur die induktiven Limites betrachtet. Es sollen

nun noch die Quotientenräume untersucht werden.

(9.17)Satz: Es seien (E_1, t_1) ein limitierter K -Vektorraum, E ein K -Vektorraum, $f_1: E_1 \longrightarrow E$ eine surjektive, lineare Abbildung. Dann ist die Quotientenlimitierung t_Q auf E bezüglich f_1 und (E_1, t_1) mit der linearen Struktur von E verträglich. Es gilt ferner:

$$(x \in E) \quad t_Q(x) = \{ \mathcal{F} + x \mid \mathcal{F} \in IF(E) \wedge \exists g (g \in t_1(o) \wedge \mathcal{F} \cong f_1(g)) \}.$$

Beweis: Es werde zuerst gezeigt, daß $t_Q(x)$ die angegebene Gestalt besitzt. Nach Definition von t_Q gilt $\mathcal{F}' \in t_Q(x)$ genau dann, wenn es y_i aus $f_1^{-1}(x)$ ($i = 1, \dots, n$) und wegen der Kompatibilität von t_1 mit der Linearstruktur von E_1 Filter g_i aus $t_1(o)$ derart gibt, daß

$$\begin{aligned} \mathcal{F}' &\cong \bigwedge_{i=1}^n f_1(g_i + y_i) = \bigwedge_{i=1}^n (f_1(g_i) + f_1(y_i)) = \\ &= \bigwedge_{i=1}^n (f_1(g_i) + x) = \bigwedge_{i=1}^n f_1(g_i) + x = \\ &= f_1\left(\bigwedge_{i=1}^n g_i\right) + x. \end{aligned}$$

gilt. Damit ist die Aussage über $t_Q(x)$ bewiesen. Insbesondere besitzt dann aber $t_Q(o)$ die folgende Gestalt:

$$t_Q(o) = \{ \mathcal{F} \mid \mathcal{F} \in IF(E) \wedge \exists g (g \in t_1(o) \wedge \mathcal{F} \cong f_1(g)) \}.$$

Um die Kompatibilität der Limitierung t_Q nachzuweisen, braucht man wegen (8.4) und (8.5) nur die Bedingungen (LV I) - (LV IV) für die Filterklasse $t_Q(o)$ zu verifizieren.

(LV I) Seien $\mathcal{F}_1$ und $\mathcal{F}_2$ aus $t_Q(o)$. Dann gibt es Filter g_1 und g_2 aus $t_1(o)$ derart, daß

$\mathcal{F}_1 \cong f_1(g_1)$ und $\mathcal{F}_2 \cong f_1(g_2)$ gilt. Hieraus folgt $\mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2 \cong f_1(g_1) + f_1(g_2) = f_1(g_1 + g_2)$ und mithin $\mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2 \in t_Q(o)$.

(LV II) Aus $\mathcal{F} \cong f_1(\mathcal{G})$ folgt $\mathbb{W}\mathcal{F} \cong \mathbb{W}f_1(\mathcal{G}) = f_1(\mathbb{W}\mathcal{G})$.
und damit die gewünschte Bedingung.

(LV III) Sei x aus E . Da f_1 surjektiv ist, gibt es y aus E_1 mit $f_1(y) = x$. Dann ist
 $\mathbb{W}x = \mathbb{W}f_1(y) = f_1(\mathbb{W}y)$. Wegen $\mathbb{W}y \in t_1(o)$ folgt die dritte Bedingung.

(LV IV) Aus der Relation $\mathcal{F} \cong f_1(\mathcal{G})$ folgt für jeden Skalar λ die Relation $\lambda\mathcal{F} \cong \lambda f_1(\mathcal{G}) = f_1(\lambda\mathcal{G})$ und mithin auch die letzte Kompatibilitätsbedingung.

(9.18)Bemerkung: Sind (E_1, t_1) ein limitierter K -Vektorraum, E ein K -Vektorraum und $f_1: E_1 \rightarrow E$ eine surjektive, lineare Abbildung, so ist der Quotientenraum (E, t_Q) bezüglich der Abbildung f_1 und dem limitierten Vektorraum (E_1, t_1) ein limitierter Vektorraum. Das bedeutet: Liegen einem Quotientenraum K -Vektorräume, eine lineare, surjektive Abbildung und ein limitierter K -Vektorraum zugrunde, so führt die Bildung des Quotientenraumes nicht aus der Kategorie LKV heraus. Man rechnet unter Berücksichtigung, daß für jeden K -Vektorraum E die Abbildung l_E eine lineare Abbildung ist, sofort nach, daß die Limitierung t_Q auf E sich wie folgt charakterisieren läßt:
Sei (F, s) ein limitierter Vektorraum, $f: E \rightarrow F$ sei eine lineare Abbildung. Dann ist t_Q die eindeutig bestimmte kompatible Limitierung t auf E , für die die folgenden Aussagen äquivalent sind:

- a) $f: (E, t) \rightarrow (F, s)$
- b) $ff_1: (E_1, t_1) \rightarrow (F, s)$.

Das aber bedeutet, daß (E, t_Q) auch Quotientenraum

von (E_1, t_1) und f_1 in der Kategorie LKV ist.

Aus (7.13) und (9.18) ergibt sich nun das folgende Corollar:

(9.19)Corollar: Sei (E, t) ein limitierter Vektorraum.

M sei ein Unterraum von E , E/M sei der (algebraische) Quotientenraum von E nach M , $m: E \longrightarrow E/M$ sei der natürliche Homomorphismus. t_Q sei die durch m und (E, t) auf E/M induzierte Quotientenlimitierung. $(E/M, t_Q)$ ist genau dann separiert, wenn der Unterraum M von (E, t) t -abgeschlossen ist.

Beweis: Da auf limitierten Vektorräumen die Bedingungen (T_1) und (T_2) äquivalent sind (siehe (5.3) und (8.13)) ist nach (7.13) und (9.18) die Bedingung notwendig. Die Bedingung ist aber andererseits hinreichend. Sei nämlich y aus E und x aus $m^{-1}(y)$.

Dann gilt wegen der Linearität von m die Relation $m^{-1}(y) = M+x$. Nun ist aber nach (8.9) die Abbildung $z \longrightarrow z+x$ bezüglich der Topologie $o_F(t)$ ein Homöomorphismus. Das aber bedeutet, daß $m^{-1}(y) = M+x$ genau dann t -abgeschlossen ist, wenn M t -abgeschlossen ist. Nach (7.13) folgt dann die (T_1) -Eigenschaft von $(E/M, t_Q)$ und nach (8.13) die Separiertheit von $(E/M, t_Q)$.

(9.20)Bemerkung: Sei (E, t) ein beliebiger limitierter Vektorraum. Es sei M die abgeschlossene Hülle von $\{0\}$ bezüglich der Topologie $o_E(t)$. Wegen der komponentenweisen Stetigkeit der Skalarmultiplikation bezüglich der Topologie $o_E(t)$ (nach (8.8) bezie-

hungsweise (8.9)) folgt, daß mit jedem x aus M und jedem Skalar λ aus K auch λx aus M sein muß, d.h., M ist homogen. Andererseits folgt aus dem noch zu beweisenden Ergebnis, daß die Topologie $o_E(t)$ nicht mit der Linearstruktur von E verträglich sein muß - insbesondere aus der Unstetigkeit der Addition - daß mit x und y aus M nicht unbedingt $x+y$ aus M sein muß. M muß nicht notwendigerweise ein Unterraum von E sein, d.h., E/M muß nicht notwendigerweise in der Kategorie der Vektorräume über K definiert sein. Man kann also nicht ohne weiteres einem limitierten Vektorraum durch Quotientenbildung nach der t -abgeschlossenen Hülle einen separierten, limitierten Vektorraum zuordnen. Es werde nun aber mit Hilfe des Begriffs eines vollständigen limitierten Vektorraumes eine hinreichende Bedingung dafür angegeben, wann ein Quotientenraum wieder separiert ist.

(9.21)Definition: Sei (E, t) ein limitierter Vektorraum. Ein Filter $\mathcal{F}$ aus $IF(E)$ heiße Cauchy-Filter, wenn $\mathcal{F} - \mathcal{F} \in t(o)$ gilt.

(9.22)Bemerkung: Wie man sofort verifiziert, ist jeder in (E, t) konvergente Filter ein Cauchy-Filter. Ferner ist jeder Filter, der feiner als ein Cauchy-Filter ist, wieder ein Cauchy-Filter.

(9.23)Definition: Der limitierte Vektorraum (E, t) heiße vollständig, wenn jeder Cauchy-Filter konvergiert. Ein Unterraum eines limitierten Vektorraumes heiße vollständig, wenn er mit der Relativlimitierung

versehen ein vollständiger, limitierter Vektorraum ist.

(9.24)Satz: Sei (E, t) ein separierter, limitierter Vektorraum. (M, t_M) sei ein vollständiger Unterraum. Dann ist M ein t -abgeschlossener Unterraum von (E, t) .

Beweis: Es ist das in (7.7) angegebene Kriterium zu verifizieren. Seien x aus E , $\tilde{f}$ aus $t(x)$ und M aus $\tilde{f}$. Hiernach besitzt $\tilde{f}$ eine Spur auf M und es gilt $F_E(\text{Sp}_M(\tilde{f})) = \tilde{f}$. Es läßt sich nun zeigen, daß $\text{Sp}_M(\tilde{f})$ auf (M, t_M) ein Cauchy-Filter ist. Sei B aus $\text{Sp}_M(\tilde{f}) - \text{Sp}_M(\tilde{f})$. Dann gibt es zwei Mengen F_1 und F_2 aus $\tilde{f}$ mit $F_1, F_2 \subseteq M$ derart, daß $F_1 - F_2 \subseteq B$ gilt. Demnach ist B aus $\tilde{f} - \tilde{f}$. Da B in M liegen sollte, folgt $B \in \text{Sp}_M(\tilde{f} - \tilde{f})$. Sei andererseits B aus $\text{Sp}_M(\tilde{f} - \tilde{f})$. Dann gibt es F_1' und F_2' aus $\tilde{f}$ derart, daß die Relationen $F_1' - F_2' \subseteq B$ und $B \subseteq M$ erfüllt sind. Definiere $F_1 := F_1' \cap M$ und $F_2 := F_2' \cap M$. Hieraus folgt $F_1, F_2 \in \tilde{f}$, $F_1 - F_2 \in \text{Sp}_M(\tilde{f}) - \text{Sp}_M(\tilde{f})$, $F_1 - F_2 \subseteq B$. Also gilt $\text{Sp}_M(\tilde{f} - \tilde{f}) = \text{Sp}_M(\tilde{f}) - \text{Sp}_M(\tilde{f})$. Da $\tilde{f}$ nach Voraussetzung bezüglich t gegen x konvergiert, folgt $\tilde{f} - \tilde{f} \in t(o)$. Nach Definition der Relativlimitierung folgt dann aber $\text{Sp}_M(\tilde{f} - \tilde{f}) \in t_M(o)$. Wegen der soeben bewiesenen Identität folgt, daß $\text{Sp}_M(\tilde{f})$ auf (M, t_M) ein Cauchy-Filter ist. Da (M, t_M) nach Voraussetzung vollständig ist, folgt die Existenz von y aus M mit $\text{Sp}_M(\tilde{f}) \in t_M(y)$. Nach Definition der Relativlimitierung gilt diese Relation genau dann, wenn $\tilde{f} = F_E(\text{Sp}_M(\tilde{f}))$ aus $t(y)$ ist. Nach Voraussetzung ist (E, t) separiert, d.h., der Grenzwert

des konvergenten Filters $\mathcal{F}$ ist eindeutig bestimmt, es muß $x = y$ gelten. Also ist x aus M . Folglich ist der Unterraum M in (E, t) t -abgeschlossen.

(9.25)Corollar: Sei (E, t) ein separierter, limitierter Vektorraum, (M, t_M) sei ein vollständiger Unterraum von (E, t) . Dann ist der Quotientenraum E/M versehen mit der Quotientenlimitierung bezüglich dem kanonischen Homomorphismus und (E, t) separiert.

Für vollständige, limitierte Vektorräume verifiziert man leicht den folgenden Satz:

(9.26)Satz: Sei (E, t) vollständig. (F, s) sei linear homöomorph zu (E, t) . Dann ist auch (F, s) vollständig.

10. Spezielle induktive Systeme schwacher Topologien auf unendlichdimensionalen K-Vektorräumen.

Es ist Ziel dieses Kapitels, auf einem beliebigen unendlichdimensionalen K-Vektorraum E eine kompatible, separierte Limitierung t_E derart zu konstruieren, daß sich von dieser Limitierung später zeigen läßt, daß weder $o_E(t_E)$ noch $p_E(t_E)$ mit der Linearstruktur von E verträglich sind. Im Folgenden soll unter der Dimension eines Vektorraumes stets die Kardinalzahl einer Hamel-Basis des Vektorraumes verstanden werden. Zunächst werde der Raum P_0 aller Polynome f mit Koeffizienten in K auf dem Intervall $[0,1]$ mit der Eigenschaft, daß für f aus P_0 stets $f(0) = 0$ gilt, betrachtet. Dieser Raum liegt auf Grund des Approximationsatzes von Weierstraß dicht im Raum C_0 aller stetigen Funktionen auf $[0,1]$ mit Werten in K , die im Punkte 0 den Wert 0 annehmen, wenn C_0 mit der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz versehen wird. P_0 ist ein Vektorraum über K mit $\dim P_0 = \aleph_0$. Sei L^2 der Hilbertraum aller auf dem Intervall $[0,1]$ bezüglich dem Lebesgueschen Maß quadratisch summierbaren Funktionen. Bezüglich der Hilbertraumtopologie liegt C_0 dicht in L^2 . Die Topologie auf L^2 induziert auf C_0 eine normierbare Topologie (- die durch das innere Produkt erzeugt wird -), die gröber als die Topologie der gleichmäßigen Konvergenz ist. Insbesondere ist dann auch P_0 bezüglich dieser Relativtopologie dicht in L^2 . Sei nun P'_0 der Raum aller linearen

Funktionale auf P_0 . Das innere Produkt auf L^2 erzeugt eine injektive, lineare beziehungsweise antilineare Abbildung $I: L^2 \longrightarrow P'_0$: Jeder Funktion k aus L^2 wird ein Funktional $I(k)$ aus P'_0 zugeordnet durch $\langle f, I(k) \rangle := \int_0^1 f(s) \overline{k(s)} ds$. Insbesondere folgt, daß der Raum $I(L^2)$ ein totaler Unterraum von P'_0 ist. Da I eine injektive, (anti)lineare Abbildung von L^2 in P'_0 ist, wird insbesondere, wie man aus der Hilbertraumtheorie herleitet, jeder dichte Unterraum von L^2 vermöge I auf einen totalen Unterraum von P'_0 abgebildet. (Dies folgt insbesondere aus der im Hilbert-Raum für jede Teilmenge S geltenden Relation $S^{\perp\perp} = \overline{\text{sp}(S)}$, wobei $\overline{\text{sp}(S)}$ die abgeschlossene, lineare Hülle von S ist.) Da P_0 , wie aus oben angestellter Betrachtung hervorgeht, ein dichter Unterraum von L^2 ist, ist insbesondere $I(P_0)$ ein totaler Unterraum von P'_0 . Da ferner die Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf P_0 relativiert stärker als die Hilbertraumtopologie auf P_0 relativiert ist, folgt, daß jeder bezüglich der gleichmäßigen Konvergenz auf P_0 in P_0 dichte Unterraum auch dicht in L^2 und sein Bild unter I in P'_0 mithin total ist. Mit Hilfe dieser Betrachtungen sollen nun abzählbar viele, totale Unterräume von P'_0 konstruiert werden, die eine absteigende Folge bilden und deren Durchschnitt nur das Nullfunktional enthält.

(10.1) Satz: In P_0 existiert eine Folge (P_n) von Teilräumen mit den folgenden Eigenschaften:

a) Jeder Unterraum P_n liegt dicht in P_0 bezüglich

der gleichmäßigen Konvergenz.

b) Es gilt stets $P_{n+1} \subseteq P_n$.

c) Es gilt $\bigcap_{n=1}^{\infty} P_n = \{0\}$.

Beweis: Man definiere

$$P_n := \{f|_{[0,1]} / f(x) = a_{2^n}x^{2^n} + \dots + a_mx^m, m \leq 2^n, a_i \in K\}.$$

Man weist sofort nach, daß P_n ein Unterraum von P_0 ist und daß $P_{n+1} \subseteq P_n$ für jede natürliche Zahl n gilt. Die Räume P_n werden mit der Relativtopologie der gleichmäßigen Konvergenz versehen. Es werde nun als erstes gezeigt, daß bezüglich dieser Topologie P_{n+1} dicht in P_n liegt.

Sei f ein Polynom aus P_n . Dann besitzt f die folgende Gestalt: $f(x) = a_{2^n}x^{2^n} + \dots + a_mx^m$, wobei ohne Einschränkung der Allgemeinheit angenommen werden kann, daß $m \geq 2^{n+1}$ gilt. (Sonst setze man die entsprechenden Koeffizienten $= 0$.) Durch den Approximationssatz von Weierstraß wird die Existenz einer Folge (g_i) von Polynomen garantiert, die die Eigenschaft besitzt, auf $[0,1]$ gleichmäßig gegen die Funktion $x \rightarrow x^{1/2}$ zu konvergieren. Hierbei kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit angenommen werden, daß für jede natürliche Zahl i stets $g_i(0) = 0$ gilt, d.h., der konstante Term der Polynome g_i verschwindet. Die Polynome g_i liegen alle in P_0 . Hieraus erhält man:

Die Polynomfolge $(g_{i,n})_{i \in N}$ ($N =$ Menge der natürlichen Zahlen) definiert durch $g_{i,n}(x) := g_i(x^{2^n})$ besteht aus Polynomen, deren Koeffizienten mit Index $j \leq 2n-1$ alle verschwinden. Die Folge $(g_{i,n})_{i \in N}$

approximiert auf $[0,1]$ gleichmäßig die Funktion $x \longrightarrow x^n$.

Für das oben vorgegebene Polynom f definiere man nun eine Folge von Polynomen (f_i) aus P_{n+1} wie folgt:

$$(x \in [0,1]) \quad f_i(x) := \sum_{j=0}^{2^{n+1}-1} a_{2^{n+1}j+i, 2^{n+1}}(x) + \sum_{j=2^{n+1}}^m a_j x^j.$$

Hierbei liegen auf Grund der zuvor angestellten Betrachtung alle Polynome $g_{i, 2^{n+1}}$ in P_{n+1} , folglich also auch die f_i als Linearkombinationen von Polynomen aus P_{n+1} . Da nun aber die Folgen $(g_{i, 2^{n+1}})_{i \in \mathbb{N}}$ die Polynome $x \longrightarrow x^{2^{n+1}}$ gleichmäßig approximieren, folgt unmittelbar, daß f gleichmäßiger Grenzwert der Folge (f_i) sein muß. Demnach liegt der Raum P_{n+1} dicht in P_n . Es folgt nun unmittelbar durch vollständige Induktion, daß alle Räume P_n bezüglich der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz dicht in P_0 liegen. Damit sind die Bedingungen (a) und (b) erfüllt. Man erkennt ferner nun sofort, daß $\bigcap_{n=1}^{\infty} P_n = \{0\}$ gilt, also auch die Behauptung (c) erfüllt ist.

(10.2) Corollar: In P'_0 existiert eine Folge totaler Unterräume (P_n^*) mit den Eigenschaften:

- a) Es gilt $P_{n+1}^* \subseteq P_n^*$.
- b) Es gilt $\bigcap_{n=1}^{\infty} P_n^* = \{0'\}$.

Beweis: Definiere $P_n^* := I(P_n)$. Da nach den zu Beginn dieses Kapitels angestellten Betrachtungen aus der Dichtigkeit von P_n in P_0 bezüglich der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz die Dichtigkeit der P_n in L^2 bezüglich der Hilbertraumtopologie folgte, sind die P_n^*

totale Unterräume von P'_0 . Aus den Relationen (b) und (c) in (10.1) und der Eigenschaft von I , eine injektive Abbildung zu sein, folgen dann unmittelbar die Relationen (α) und (β) in (10.2).

(10.3) Corollar: Sei E ein K -Vektorraum mit

$\dim E = \aleph_0$. Dann existiert im algebraischen Dual E' von E eine abzählbare Folge (E_n^*) von totalen Unterräumen, die den Bedingungen

$$(\alpha) \quad E_{n+1}^* \subseteq E_n^*$$

$$(\beta) \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n^* = \{0'\} \quad \text{genügt.}$$

Beweis: Nach Voraussetzung ist $\dim E = \aleph_0$. Demnach existiert wegen $\dim P_0 = \aleph_0$ ein Isomorphismus $Is: E \longrightarrow P_0$. Die algebraisch adjungierte Abbildung $(Is)': P'_0 \longrightarrow E'$ stellt dann einen Isomorphismus zwischen P'_0 und E' her. Definiert man nun $E_n^* := (Is)'(P_n^*)$, so genügt (E_n^*) den in (10.3) aufgestellten Forderungen.

Ziel der folgenden Untersuchungen soll es sein, den in (10.3) aufgezeichneten Sachverhalt für allgemeine, unendlichdimensionale K -Vektorräume zu untersuchen.

Hierzu benötigt man :

(10.4) Lemma: Sei B eine Menge, deren Kardinalzahl größer als $\aleph_0$ sei ($Cz B > \aleph_0$). Dann existiert eine Partition $(C_j)_{j \in J}$ von B derart, daß für alle Indizes j aus J gilt $Cz C_j = \aleph_0$. Das bedeutet: Die Menge B läßt sich in ein System von paarweise disjunkten Mengen, die alle von abzählbarer Mächtigkeit sind, zerlegen.

Beweis: Der Beweis wird mit Hilfe des Zornschen Lemmas

geführt. Definiere eine Klasse Σ von Mengensystemen wie folgt :

$$\Sigma := \{ \kappa / \kappa = \{ B_j / j \in J, B_j \subseteq B, \text{Cz } B_j = \mathfrak{S}_0, j \neq j' \sim B_j \cap B_{j'} = \emptyset \} \} .$$

Die Klasse Σ ist nichtleer, denn nach Voraussetzung ist $\text{Cz } B > \mathfrak{S}_0$; wie aus der Mengenlehre bekannt ist, enthält dann B eine abzählbare Teilmenge B_1 . Dann ist aber das System $\{ B_1 \}$ aus Σ . Man ordne Σ durch die Inklusion von Mengensystemen. Es soll gezeigt werden, daß hierdurch Σ induktiv geordnet ist, d.h., daß es zu jeder Kette Ξ aus Σ ein Supremum in Σ gibt. Sei Ξ eine Kette aus Σ . Dann definiere man $\mathcal{T} = \bigcup_{\kappa \in \Xi} \kappa$. Es ist sofort ersichtlich, daß für jedes B_j aus $\mathcal{T}$ gilt : B_j ist eine abzählbare Teilmenge von B . Seien ferner B_j und $B_{j'}$ zwei verschiedene Mengen aus $\mathcal{T}$. Dann gibt es nach Definition von $\mathcal{T}$ in der Kette Ξ zwei Mengensysteme κ und κ' derart, daß $B_j \in \kappa$ und $B_{j'} \in \kappa'$ gilt. Da Ξ eine Kette ist, kann ohne Einschränkung der Allgemeinheit angenommen werden, daß $\kappa \subseteq \kappa'$ gilt. Folglich ist $B_j \in \kappa'$ und $B_{j'} \in \kappa'$. Dann gilt aber wegen $\kappa' \in \Sigma$: $B_j \cap B_{j'} = \emptyset$. Hieraus folgt $\mathcal{T} \in \Sigma$. Nach Konstruktion ist $\mathcal{T}$ Supremum von Ξ . Demnach ist Σ induktiv geordnet. Also existieren bezüglich dieser Ordnung maximale Elemente in Σ . Sei $\mathcal{M} = \{ B_j / j \in J \}$ ein maximales Element. Dann muß gelten $\text{Cz}(B \setminus (\bigcup_{j \in J} B_j)) < \mathfrak{S}_0$. Wäre dies nämlich nicht der Fall, so ließe sich eine abzählbare Menge B' aus $B \setminus (\bigcup_{j \in J} B_j)$ auswählen. Dann würde das System $\mathcal{M} \cup \{ B' \}$ in Σ liegen und $\mathcal{M}$ umfassen, was ein Widerspruch zur Maximalität von $\mathcal{M}$ wäre. Folglich

muß für jedes maximale System $\{B_j / j \in J\}$ die obige Relation gelten. Mit Hilfe dieses Systems wird die gesuchte Partition konstruiert. Wähle ein festes j_1 aus J aus, definiere $C_{j_1} := B_{j_1} \cup (B \setminus (\bigcup_{j \in J} B_j))$ und $C_j := B_j$ für alle j aus J mit $j \neq j_1$. Dann ist $(C_j)_{j \in J}$ eine Partition von B , die das Gewünschte leistet.

(10.5) Satz: Sei E ein beliebiger K -Vektorraum mit $\dim E \geq \aleph_0$. Dann existiert ein gerichtetes System A und zu jedem a aus A ein totaler Unterraum E_a^* von E' , so daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(α) Für a und b aus A mit $a \leq b$ gilt

$$E_b^* \subseteq E_a^*.$$

(β) Es gilt $\bigcap_{a \in A} E_a^* = \{0'\}$.

Beweis: Es werde zuerst bemerkt, daß im Folgenden die Gleichheit von K -Vektorräumen hier im Sinne von Isomorphismen von K -Vektorräumen zu interpretieren ist.

Für den Fall $\dim E = \aleph_0$ stimmt die Aussage von (10.5) praktisch mit der von (10.3) überein. Es genügt, den Fall $\dim E = \aleph > \aleph_0$ zu betrachten. Sei B eine Hamelbasis von E . Dann ist $Cz B = \aleph$. Ferner sei $(B_j)_{j \in J}$ eine Partition dieser Hamelbasis in abzählbare Teilmengen, deren Existenz nach (10.4) gesichert ist. Es sei E_j der von B_j in E aufgespannte Unterraum ($j \in J$), $\dim E_j = \aleph_0$. Dann gilt die folgende Darstellung von E als algebraisch direkte Summe der E_j : $E = \bigoplus_{j \in J} E_j$. Nach bekannten Sätzen aus der linearen Algebra folgt für den Dualraum

E' von E die Darstellung als Produkt der algebraischen
 Duale E'_j der Räume E_j : $E' = \prod_{j \in J} E'_j$.

Nach (10.3) existiert in E'_j ($j \in J$) eine Folge
 $(E_{j,n}^*)_{n \in \mathbb{N}}$ von totalen Unterräumen, die den Bedingun-
 gen (α) und (β) von (10.3) genügt. Man definiere
 die Indexmenge A durch $A := \mathbb{N}^J$ und versehe A
 mit der üblichen, von $\mathbb{N}$ induzierten Ordnung:

Seien a und b aus A . Es gelte $a \leq b$ genau
 dann, wenn für jedes j aus J gilt $a(j) \leq b(j)$.

Man erkennt sofort, daß A bezüglich dieser Ordnung
 gerichtet ist, da $\mathbb{N}$ gerichtet ist. Für a aus A
 definiere man nun den Unterraum E_a^* von $E' = \prod_{j \in J} E'_j$
 durch :

$$E_a^* := \prod_{j \in J} E_{j,a(j)}^* .$$

Da jeder der Räume $E_{j,a(j)}^*$ ($j \in J$) nach Wahl der
 Folgen $(E_{j,n}^*)_{n \in \mathbb{N}}$ total über E_j ist, ist der Raum
 E_a^* , wie eine kurze Rechnung sofort ergibt, total über
 $E = \prod_{j \in J} E_j$. Man erkennt nun sofort aus der Definition
 der Ordnung auf A und der Eigenschaft (α) in
 (10.3), daß für zwei Indizes a und b aus A stets
 $E_b^* \subseteq E_a^*$ folgt, wenn $a \leq b$ gilt. Ferner folgt aus
 der Eigenschaft (β) in (10.3) der Folgen $(E_{j,n}^*)_{n \in \mathbb{N}}$,
 daß die Behauptung (β) in (10.4) gilt. Damit ist
 aber (10.4) bewiesen.

Auf Grund dieses Satzes ist nun jedem unendlichdimen-
 sionalen K -Vektorraum E eine gerichtete Menge A
 und jedem a aus A ein totaler Unterraum E_a^* von E'
 derart zugeordnet, daß die Bedingungen (α) und (β)
 in (10.4) erfüllt sind. Jeder der Dualitäten (E, E_a^*)
 ($a \in A$) entspricht nun in eindeutiger Weise eine
 schwache Topologie $T_a := \mathcal{G}(E, E_a^*)$, die wegen der

Totalität von E_a^* über E separiert ist. Sind a und b aus A , so folgt aus $a \leq b$ die Relation $E_b^* \subseteq E_a^*$ und für die Topologien $T_a \leq T_b$. Damit ist ein induktives System $(E, T_a)_{a \in A}$ von lokalkonvexen Vektorräumen definiert. Jedem unendlichdimensionalen K -Vektorraum werde nun ein solches induktives System zugeordnet.

(10.6) Definition: Sei E ein unendlichdimensionaler K -Vektorraum, $(E, T_a)_{a \in A}$ sei ein ihm zugeordnetes induktives System. Dann werde die Limitierung t_E definiert durch:

$$t_E := \varinjlim (LKV) T_a .$$

(10.7) Bemerkung: Da nach Konstruktion die T_a separiert sind, genügt t_E nach (9.3) und (7.4) ebenfalls der (T_2) -Bedingung. Es soll nun in den folgenden Abschnitten gezeigt werden, daß die Limitierung t_E auf jedem unendlichdimensionalen Vektorraum das gewünschte Gegenbeispiel liefert, d.h., daß auf jedem unendlichdimensionalen Vektorraum E eine kompatible Limitierung t_E derart existiert, daß $p_E(t_E)$ und $o_E(t_E)$ nicht mit der Linearstruktur verträglich sind. Es erhebt sich in diesem Zusammenhang die Frage, ob dies auch auf endlichdimensionalen Vektorräumen der Fall sein kann. Später wird gezeigt werden, daß auf endlichdimensionalen Vektorräumen jede separierte, kompatible Limitierung eine Topologie ist, die mit der euklidischen Topologie übereinstimmt und somit sich ein Gegenbeispiel der angegebenen Art nicht konstruieren läßt. Um nun das Gegenbeispiel verifizieren zu können, benötigt man die Kenntnis einiger Eigenschaften schwacher Topologien.

11. Einige Eigenschaften schwacher Topologien.

(11.1)Satz: Sei E ein K -Vektorraum. S sei eine schwache Topologie auf E , T sei eine lineare Topologie auf E , für die gelte $S \leq T$. Dann ist auch T eine schwache Topologie, für die gilt :

$$T = \mathcal{O}(E, (E, T)^*) .$$

Beweis: Es ist klar, daß allgemein $T \leq \mathcal{O}(E, (E, T)^*)$ gilt. Aus diesem Grunde braucht man nur zu zeigen, daß auch die Relation $\mathcal{O}(E, (E, T)^*) \leq T$ erfüllt ist. Diese Aussage ist äquivalent zu der Aussage, daß der Nullumgebungsfilter auf E bezüglich der Topologie $\mathcal{O}(E, (E, T)^*)$ feiner ist als der Nullumgebungsfilter auf E bezüglich der Topologie T . Hierzu wiederum äquivalent ist, daß es zu jeder T -Nullumgebung U eine $\mathcal{O}(E, (E, T)^*)$ -Nullumgebung U' derart gibt, daß $U' \subseteq U$ gilt. Das ist aber wiederum äquivalent zu der Aussage, daß es zu jeder T -Nullumgebung U lineare Funktionale $e'_1, \dots, e'_n$ und positive Zahlen $r_1, \dots, r_n$ derart gibt, daß für jedes x aus E , das die Relationen $|\langle x, e'_i \rangle| < r_i$ ($i=1, \dots, n$) erfüllt, folgt : $x \in U$.

Sei U eine T -Nullumgebung. Dann gibt es wegen der Stetigkeit der Addition eine T -Nullumgebung V derart, daß $V+V \subseteq U$ gilt. Da jeder lineare, topologische Raum eine Nullumgebungsbasis aus abgeschlossenen Mengen besitzt, existiert eine T -Nullumgebung W derart, daß die abgeschlossene Hülle $\bar{W}$ von W bezüglich T in V liegt : $\bar{W} \subseteq V$. Da W eine T -Nullumgebung ist und die Topologie T größer als die schwache Topologie

S ist, ist auch W eine S -Nullumgebung. Da S eine schwache Topologie ist, liegt in W ein Unterraum von E von endlicher Kodimension. Die abgeschlossene Hülle dieses Unterraumes bezüglich T ist wieder ein Unterraum von endlicher Kodimension, der mit F bezeichnet werde. F liegt in $\bar{W}$ und mithin in V . Demnach enthält V einen bezüglich T abgeschlossenen Unterraum von endlicher Kodimension. Dann existiert zu F in (E, T) ein endlichdimensionales, separiertes, topologisches Komplement G so, daß sich E als topologisch direkte Summe der Unterräume (F, T_F) und (G, T_G) darstellen läßt: $(E, T) = (F, T_F) \dot{+}_{\text{op}} (G, T_G)$. Sei nun $\dim G = n$. Für den dualen Raum $(E, T)^*$ gilt dann die Darstellung: $(E, T)^* = (F, T_F)^* \dot{+} (G, T_G)^*$. Hierbei ist $(F, T_F)^* = G^\perp$ und $(G, T_G)^* = F^\perp$. Da (G, T_G) endlichdimensional und separiert ist, ist $(G, T_G)^* = G'$ mit $\dim G = \dim G' = n$. Sei $g'_1, \dots, g'_n$ eine Basis von G . Da G nach dem Satz von Tychonoff nur eine einzige separierte, mit der Vektorraumstruktur verträgliche Topologie tragen kann, gibt es zu jeder Nullumgebung V_G in (G, T_G) Zahlen $r_i > 0$ ($i=1, \dots, n$) derart, daß gilt $\bigcap_{i=1}^n \{x / | \langle x, g'_i \rangle | < r_i\} \subseteq V_G$. Da nun V Nullumgebung in (E, T) ist, ist $V_G := V \cap G$ nach Definition der Relativtopologie T_G eine Nullumgebung des endlichdimensionalen, separierten topologischen Vektorraumes (G, T_G) . Auf Grund der oben aufgeführten Isomorphismen können die Funktionale g'_i ($i=1, \dots, n$) mit Elementen aus $F^\perp$ identifiziert werden. Insbesondere folgt dann, daß F im

Kern eines jeden g'_i liegt und daß jedes g'_i bezüglich der Topologie T auf E ein stetiges, lineares Funktional ist. Es seien die Zahlen $r_i > 0$ ($i=1, \dots, n$) wie zuvor angedeutet für V_G gewählt. Sei x ein beliebiges Element aus E mit der Eigenschaft $|\langle x, g'_i \rangle| < r_i$ ($i=1, \dots, n$). x läßt sich in eindeutiger Weise in der Gestalt $x = f + g$ ($f \in F$, $g \in G$) darstellen. Dann folgt aber, da F für jeden Index i im Kern von g'_i enthalten ist, daß $|\langle x, g'_i \rangle| = |\langle g, g'_i \rangle| < r_i$ gelten muß, d.h., es gilt $g \in V_G \subseteq V$. Andererseits ist $f \in F \subseteq V$. Folglich gilt $x = f + g \in V + V \subseteq U$ für alle x aus E , die den Abschätzungen $|\langle x, g'_i \rangle| < r_i$ ($i=1, \dots, n$) genügen. Mithin gilt für die $\mathcal{O}(E, (E, T)^*)$ -Nullumgebung $\bigcap_{i=1}^n \{x / |\langle x, g'_i \rangle| < r_i\}$ die Inklusion $\bigcap_{i=1}^n \{x / |\langle x, g'_i \rangle| < r_i\} \subseteq U$. Damit ist der Satz bewiesen.

(11.2) Corollar: Sei A eine gerichtete Menge. $(E, T_a)_{a \in A}$ sei ein induktives System von schwach-topologischen Vektorräumen bei festem Vektorraum E . Dann stimmen die induktiven Limites dieses Systems in LkKV und TopKV überein.

Beweis: Sei $T := \lim_{\rightarrow} (\text{TopKV}) T_a$. Dann gilt für jeden Index a aus A : $l_E: (E, T_a) \longrightarrow (E, T)$, d.h., $T_a \leq T$. Dann ist aber nach (11.1) T eine schwache Topologie, also lokalkonvex. Ferner gilt wegen (9.4) die Identität $\lim_{\rightarrow} (\text{LkKV}) T_a = p_E^0(T) = T$, da T lokalkonvex ist. Demnach stimmen die beiden Limites überein.

(11.3) Corollar: Sei E ein Vektorraum, A sei eine gerichtete Menge, für a aus A sei T_a eine schwache

Topologie derart, daß $(E, T_a)_{a \in A}$ ein induktives System bildet. Definiere ferner den Unterraum E_a^* von E' ($a \in A$) durch $E_a^* = (E, T_a)^*$. Sei $E^\circ := \bigcap_{a \in A} E_a^*$ und $T := \varinjlim (\text{TopKV}) T_a = \varinjlim (\text{LkKV}) T_a$. Dann gilt

$$T = \mathcal{G}(E, E^\circ) \quad .$$

Beweis: Nach (11.1) ist T eine schwache Topologie.

Um die Behauptung zu beweisen, muß man zeigen, daß $(E, T)^* = E^\circ$ gilt. Sei e' aus $(E, T)^*$. Das ist nach Definition von T ((9.4) und (8.19)) genau dann der Fall, wenn für jedes a aus A gilt

$e' \in (E, T_a)^* = E_a^*$. Das ist aber äquivalent zu

$$E^\circ = (E, T)^* = \bigcap_{a \in A} E_a^* \quad .$$

12. Das Gegenbeispiel .

(12.1)Satz: Auf jedem unendlichdimensionalen Vektorraum E existiert eine separierte, kompatible Limitierung t_E derart, daß weder $o_E(t_E)$ noch $p_E(t_E)$ mit der Vektorraumstruktur von E verträglich sind.

Beweis: Man wähle die in (10.6) E zugeordnete, separierte, kompatible Limitierung t_E . Es gilt dann $t_E = \underline{\text{Lim}}_{>}(\underline{\text{LKV}}) T_a$ und die folgende Vergleichskette (siehe (8.28)) :

$$t_E \leq p_E(t_E) \leq o_E(t_E) \leq p_E^1(t_E) = \underline{\text{Lim}}_{>}(\underline{\text{TopKV}}) T_a = p_E^o(t_E) = \underline{\text{Lim}}_{>}(\underline{\text{LkKV}}) T_a .$$

Nimmt man nun an, daß $o_E(t_E)$ mit der Linearstruktur von E verträglich ist, so muß nach (8.25) $o_E(t_E) = p_E^1(t_E)$ gelten . Nun ist aber nach (11.3)

$$p_E^1(t_E) = \sigma(E, \bigcap_{a \in A} E_a^*) = \sigma(E, \{o'\}) ,$$

d.h., $p_E^1(t_E)$ muß die indiskrete Topologie sein .

Andererseits ist (E, t_E) separiert, d.h., genügt der (T_2) -Bedingung. Demnach muß wegen (5.5) und (5.3)

$o_E(t_E)$ die (T_1) -Bedingung erfüllen. Da E aber un-

endlichdimensional ist, also erst recht mehr als ein Element enthält, kann die Topologie $o_E(t_E)$ nicht die indiskrete Topologie sein. Folglich erhält man

einen Widerspruch zur Annahme . Die Topologie $o_E(t_E)$

ist nicht mit der Linearstruktur kompatibel. Es kann

nun erst recht nicht $p_E(t_E)$ mit der Linearstruktur

von E verträglich sein. Wäre dies nämlich der Fall,

so müßte nach (8.7) $p_E(t_E)$ eine Topologie sein

und es müßte nach (4.9) $o_E(t_E) = o_E(p_E(t_E)) = p_E(t_E)$

gelten.

Es werde nun das hier gefundene Ergebnis im Hinblick auf das Problem der Verträglichkeit der nächstgrößeren Topologie bei limitierten Gruppen untersucht.

Nach (9.15) ist (E, t_E) ein gleichförmig limitierter Vektorraum. Dann folgt nach (8.10) und (8.12), daß auf $(E, p_E(t_E))$ die Bedingungen (LV II) - (LV IV) erfüllt sind und die verschiedenen Umgebungsfilter durch Translationen auseinander hervorgehen. Da die Limitierung $p_E(t_E)$ nicht mit der Linearstruktur verträglich ist, folgt, daß die Bedingung (LV I) nicht erfüllt sein kann. Da (LV I) aber eine notwendige Bedingung für die Stetigkeit der Addition ist, folgt somit die Unstetigkeit der Addition bezüglich $p_E(t_E)$.

Ist $\mathcal{A}(0)$ der Nullumgebungsfilter in $(E, p_E(t_E))$, so bedeutet dies die Existenz zweier Filter $\mathcal{F}_1$ und $\mathcal{F}_2$ mit $\mathcal{F}_1 \cong \mathcal{A}(0)$ und $\mathcal{F}_2 \cong \mathcal{A}(0)$ sowie $\mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2 \not\cong \mathcal{A}(0)$. Wegen $[0] \cong \mathcal{A}(0)$ gilt $\mathcal{A}(0) + \mathcal{A}(0) \cong \mathcal{A}(0)$. Aus den Voraussetzungen über $\mathcal{F}_1$ und $\mathcal{F}_2$ erhält man ferner $\mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2 \cong \mathcal{A}(0) + \mathcal{A}(0)$. Folglich muß gelten $\mathcal{A}(0) > \mathcal{A}(0) + \mathcal{A}(0)$.

Betrachtet man E allein mit der Struktur einer abelschen Gruppe und der damit kompatiblen Limitierung t_E , so folgt insbesondere für limitierte Gruppen das Ergebnis:

(12.2) Corollar: Ist (G, t) eine limitierte Gruppe, so ist im allgemeinen $p_G(t)$ nicht mit der Gruppenstruktur verträglich.

Dieses Resultat wird durch das Folgende, in dem die Inkompatibilität von $o_E(t_E)$ mit der additiven Struktur

von E bewiesen wird, auf Grund von (8.7a) bestätigt.

Der Beweis für die Inkompatibilität von $o_E(t_E)$ mit der Gruppenstruktur von E wird durch einen Widerspruch geführt. Hierzu wird das folgende Lemma benötigt:

(12.3) Lemma: (E, t) sei ein limitierter K -Vektorraum.

Die Addition auf E sei bezüglich $o_E(t)$ stetig.

Dann ist die abgeschlossene Hülle $\bar{F}$ eines Unterraumes F von E bezüglich der Topologie $o_E(t)$ wieder ein linearer Unterraum von E .

Beweis: Sei λ aus K . x sei aus $\bar{F}$. Für $\lambda = 0$

folgt $\lambda x \in F \subseteq \bar{F}$. Für $\lambda \neq 0$ ist die Abbildung

$j_\lambda: x \longrightarrow \lambda x$ ein Homöomorphismus bezüglich $o_E(t)$.

Da F ein linearer Raum ist, gilt $j_\lambda(F) = \lambda F = F$.

Dann folgt wegen der Homöomorphieeigenschaft von j_λ

$$\lambda \bar{F} = j_\lambda(\bar{F}) = \overline{j_\lambda(F)} = \overline{\lambda F} = \bar{F}.$$

Demnach gilt für x aus $\bar{F}$ stets $\lambda x \in \bar{F}$.

Insbesondere ist die Abbildung $j_{-1}: x \longrightarrow -x$ stetig.

Interpretiert man nun E als abelsche Gruppe, so ist

$(E, o_E(t))$ nach Voraussetzung über die Addition eine

topologische abelsche Gruppe. Da F als linearer Un-

terraum von E eine Untergruppe ist, ist - wie aus

der Theorie der topologischen Gruppen bekannt - die

abgeschlossene Hülle $\bar{F}$ von F bezüglich $o_E(t)$

wieder eine abelsche Gruppe. Für x und y aus $\bar{F}$

gilt demnach stets $x+y \in \bar{F}$. Damit ist aber bewiesen,

daß $\bar{F}$ ein linearer Unterraum von E ist.

Sei nun E wieder ein unendlichdimensionaler Vektor-

raum und t_E ($t_E = \varinjlim (\text{LKV}) T_a$) eine nach (10.6)

zugeordnete Limitierung auf E .

(12.4)Satz: Die Addition auf E ist bezüglich $o_E(t_E)$ unstetig.

Beweis: Annahme: Die Addition sei bezüglich $o_E(t_E)$ stetig. $o_E(t_E)$ genügt nach Konstruktion dem Axiom (T_1) . Da die Addition und $o_E(t_E)$ kompatibel sein sollen, folgt aus der Beweisführung zu (12.3), daß $(E, o_E(t_E))$ eine topologische Gruppe ist. Da $o_E(t_E)$ der (T_1) -Bedingung genügt, erfüllt $o_E(t_E)$ nach bekannten Sätzen aus der Theorie der topologischen Gruppen auch das (T_2) -Axiom. Dann gibt es eine Nullumgebung U bezüglich $o_E(t_E)$ derart, daß die abgeschlossene Hülle $\bar{U}$ von U bezüglich $o_E(t_E)$ die Bedingung $\bar{U} \neq E$ erfüllt. Wegen $T_a \leq o_E(t_E)$ ($a \in A$) ist dann U auch Nullumgebung bezüglich jeder der schwachen Topologien T_a . Demnach muß U einen Unterraum F von E von endlicher Kodimension enthalten. Nach (12.3) ist dann die abgeschlossene Hülle $\bar{F}$ von F bezüglich $o_E(t_E)$ ein echter linearer Unterraum von E . Wegen $F \subset \bar{F}$ ist $\bar{F}$ ebenfalls von endlicher Kodimension. Wiederum wegen $T_a \leq o_E(t_E)$ ($a \in A$) ist $\bar{F}$ auch bezüglich jeder der Topologien T_a abgeschlossen. Dann ist für jeden Index a aus A der Quotientenraum $(E/\bar{F}, (T_a)_Q)$ ein endlichdimensionaler, linearer, separierter, topologischer Raum. Da nach dem Satz von Tychonoff auf $E/\bar{F}$ aber nur eine separierte, kompatible Topologie T_{nat} existieren kann, folgt für jeden Index a aus A $T_{nat} = (T_a)_Q$ und mithin für den natürlichen Homomorphismus von E auf $E/\bar{F}$: $k: (E, T_a) \longrightarrow (E/\bar{F}, T_{nat})$. Da $(E/\bar{F}, T_{nat})$

ein topologischer Vektorraum ist, folgt dann erst recht

$$k: \varinjlim (\text{TopKV})(E, T_a) \longrightarrow (E/\overline{F}, T_{\text{nat}}) .$$

Nun ist aber nach Konstruktion des induktiven Systems

$$(E_a, T_a)_{a \in A} : \quad \varinjlim (\text{TopKV})(E_a, T_a) = (E, i) ,$$

wobei i die indiskrete Topologie auf E ist. Also

$$\text{gilt } k: (E, i) \longrightarrow (E/\overline{F}, T_{\text{nat}}) . \text{ Da aber } E/\overline{F} \neq \{0\}$$

gilt und $\overline{F} = k^{-1}(0)$ wegen der Stetigkeit von k

in (E, i) abgeschlossen sein müßte, die einzigen

abgeschlossenen Teilmengen von E bezüglich i aber

E und $\emptyset$ sind, aber $\overline{F} = k^{-1}(0) \neq E$ gilt, erhält

man den gewünschten Widerspruch.

Damit ist sogar ein Beispiel für eine limitierte Grup-

pe (G, t) angegeben, so daß $(G, o_G(t))$ keine topolo-

gische Gruppe ist. Hierdurch ist also nicht nur die

Beweismethode von Fischer widerlegt, der zeigen wollte,

daß auf limitierten Gruppen (G, t) aus der Kompatibi-

lität von t auch die Verträglichkeit von $o_G(t)$

folgt, indem man zeigt, daß aus der Verträglichkeit

von t auch die Verträglichkeit von $p_G(t)$ folgt,

sondern auch die Behauptung des Satzes ad absurdum ge-

führt.

Man kann nun die Frage nach der Ursache der Inkompati-

bilität von $o_E(t)$ und $p_E(t)$ mit der linearen Struk-

tur eines unendlichdimensionalen Vektorraumes (E, t)

in den betrachteten Fällen stellen. Die Begründung gibt

das untersuchte Gegenbeispiel. Man erhält die folgende

Deutung:

(12.5) Satz: Sei E ein unendlichdimensionaler Vektor-

raum. Dann ist die Menge aller separierten, kompatiblen

Limitierungen auf E induktiv geordnet. Die Menge aller linearen, separierten Topologien ist im allgemeinen jedoch nicht induktiv geordnet.

Beweis: Die induktive Ordnung aller separierten, kompatiblen Limitierungen auf einem Vektorraum E folgt aus (9.3) und (7.4). Ein Beispiel für eine Kette von linearen, separierten Topologien, die in der Klasse aller separierten, linearen Topologien keine obere Schranke besitzt, ist durch die schwachen Topologien gegeben, die durch die Räume E_n^* in (10.3) definiert werden.

Man erkennt nun einen weiteren Vorzug der Theorie der limitierten Vektorräume: Die Crux in der Theorie der topologischen Vektorräume, daß induktive Limites die Trennungseigenschaften vergessen können, tritt nicht auf. Man erhält topologische und lokalkonvexe induktive Limites aber dennoch einfach durch Anwendung der Funktoren p^1 und p^0 . Es folgt hierbei ebenfalls, daß die Funktoren p^1 und p^0 sämtliche Trennungseigenschaften vergessen können. Man erkennt, daß eine weite Klasse von linearen Limitierungen (siehe (9.5)) ganz einfach dadurch gewonnen werden kann, daß man induktive Limites über lineare Topologien im Sinne der Theorie der limitierten Vektorräume bildet. Die Frage, wie diese induktiven Limites beziehungsweise die so erzeugten Limitierungen in LKV zu charakterisieren sind, wurde in (9.7) beziehungsweise (9.16) beantwortet.

13. Endlichdimensionale , separierte Vektorräume über
nichtdiskret bewerteten Körpern.

Im Folgenden sei (K, T_{nat}) ein nichtdiskret bewerteter, vollständiger Körper (- im Gegensatz zu den vorangegangenen Kapiteln, in denen stets $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$ gelten sollte -) . $\mathcal{V}$ sei der Nullumgebungsfilter in (K, T_{nat}) . Bei Bourbaki [3] wird für endlichdimensionale, separierte, topologische Vektorräume über (K, T_{nat}) der Satz von Tychonoff bewiesen, nämlich daß auf diesen Vektorräumen nur eine einzige separierte, mit der Linearstruktur des Vektorraumes verträgliche Topologie gibt, die mit der Produkttopologie, die durch einen Isomorphismus mit einem Raum vom Typ K^n induziert wird, übereinstimmt. Es soll im Folgenden gezeigt werden, daß es auf endlichdimensionalen Vektorräumen über K nur eine einzige separierte, gleichförmige Limitierung geben kann, die mit der Produkttopologie übereinstimmt. Unter der zusätzlichen Voraussetzung, daß (K, T_{nat}) lokalkompakt ist, läßt sich sogar zeigen, daß auf jedem endlichdimensionalen Vektorraum über (K, T_{nat}) nur eine mit der Linearstruktur verträgliche, separierte Limitierung, nämlich die Produkttopologie, existieren kann. Da insbesondere die Körper $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ lokalkompakt sind, lassen sich mit den Ergebnissen des Kapitels 12 die im Vorwort angegebenen Charakterisierungssätze für endlichdimensionale, separierte, limitierte Vektorräume über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ formulieren.

(13.1)Lemma: Notwendig und hinreichend dafür, daß eine Teilmenge B von K bezüglich der vorgegebenen Be-

wertung beschränkt ist, ist die Konvergenz des Filters

$\mathbb{W}_{F_K}(\{B\})$ bezüglich der Bewertung gegen 0 .

Beweis: Sei B beschränkt. Dann gibt es eine reelle

Zahl $r > 0$ derart, daß für alle b aus B gilt

$|b| \leq r$. Sei n eine beliebige natürliche Zahl.

Da K nichtdiskret bewertet ist, gibt es a aus K

so, daß die folgende Relation erfüllt ist: $0 < |a| \leq (rn)^{-1}$.

Für c aus $S(0, (rn)^{-1}] \cdot B$ folgt die Darstellung

$c = ab$ mit $a \in S(0, (rn)^{-1}]$ und $b \in B$. Dann gilt

die Abschätzung

$$|c| = |ab| = |a||b| \leq (rn)^{-1} |b| \leq n^{-1},$$

d.h., $S(0, (rn)^{-1}] \cdot B \subseteq S(0, n^{-1}]$. Hieraus folgt aber

$\mathbb{W}_{F_K}(\{B\}) \geq \mathbb{W}$ und mithin die Konvergenz des Filters $\mathbb{W}_{F_K}(\{B\})$ gegen 0 bezüglich der Bewertung.

Es konvergiere andererseits der Filter $\mathbb{W}_{F_K}(\{B\})$ bezüglich der Bewertung von K gegen 0 . Dann gilt

$\mathbb{W}_{F_K}(\{B\}) \geq \mathbb{W}$. Demnach gibt es eine Zahl $r > 0$

derart, daß für alle a aus K mit $|a| \leq r$ und

für alle b aus B gilt: $|a||b| \leq 1$. Ohne Einschrän-

kung der Allgemeinheit kann man nun, da K nichtdiskret

bewertet ist, annehmen, daß $r = \sup \{|a|/|a| \leq r\}$

gilt. Dann folgt $r|b| \leq 1$ und folglich für jedes b

aus B : $|b| \leq r^{-1}$, d.h., B ist bezüglich der Be-

wertung auf K beschränkt.

Es werde bemerkt, daß die Definitionen und Ergebnisse

(8.1) - (8.13), (8.24) - (8.28) und (9.17) - (9.26)

unabhängig von der speziellen Wahl $K = R$ oder $K = C$

sind und deshalb für einen beliebigen, nichtdiskret

bewerteten Körper K formuliert werden können. In

diesem Sinne sollen die soeben zitierten Abschnitte der Kapitel 8 und 9 interpretiert werden.

(13.2)Satz: Sei (E, t) ein gleichförmig limitierter, separierter, eindimensionaler Vektorraum über K .

Dann ist t identisch mit der von der Bewertung auf (K, T_{nat}) auf E induzierten Topologie.

Beweis: Aus Isomorphiegründen kann ohne Einschränkung der Allgemeinheit angenommen werden, daß $E = K$ gilt. Dann muß für die Limitierung t auf Grund von (LV III) gelten $\mathbb{W} = \mathbb{W}.1 \in t(0)$, d.h., für die natürliche, durch die Bewertung auf K induzierte Topologie T_{nat} gilt die Relation $T_{\text{nat}}(0) \subseteq t(0)$, woraus $T_{\text{nat}} \leq t$ folgt. Um den Satz zu beweisen, genügt es nun zu zeigen, daß entweder $t = T_{\text{nat}}$ gelten oder t die indiskrete Topologie sein muß, die dann aber nicht separiert ist. Es werde - genauer gesagt - gezeigt, daß aus der Annahme $T_{\text{nat}} < t$ stets folgt, daß t indiskret ist.

Aus der Annahme $T_{\text{nat}} < t$ und aus der Voraussetzung, daß t eine gleichförmige Limitierung sein soll, folgt die Existenz eines gleichförmigen Filters $\mathcal{G}$ aus $t(0)$, der den Relationen $\mathbb{W} < \mathcal{G}$ und $\forall \mathcal{G} = \mathcal{G}$ genügt. Es werde nun gezeigt, daß $\mathcal{G} = \{K\}$ gelten muß.

$\mathcal{G}$ kann keine bezüglich der Bewertung auf K beschränkte Menge enthalten. Würde nämlich eine beschränkte Menge B aus $\mathcal{G}$ existieren, so müßte gelten:

$\mathcal{G} = \forall \mathcal{G} \cong \mathbb{W}_{F_K}(\{B\}) \cong \mathbb{W}$ (nach (13.1)), was im Widerspruch zur Wahl von $\mathcal{G}$ stehen würde. Sei V eine beliebige Menge aus $\mathcal{G}$. Es werde gezeigt, daß notwendigerweise $V = K$ gelten muß. Wegen $\forall \mathcal{G} = \mathcal{G}$ folgen

die Existenz einer Zahl $r > 0$ und einer bezüglich der Bewertung unbeschränkten Menge V' aus $\mathcal{G}$, so daß $S(0, r] \cdot V' \subseteq V$ gilt. Sei nun a aus K beliebig. Da V' unbeschränkt ist, existiert a' aus V' derart, daß $|a|/r < |a'|$ gilt. Demnach ist $a \cdot (a')^{-1} \in S(0, r]$. Dann folgt aber $a = (a \cdot (a')^{-1}) \cdot a' \in S(0, r] \cdot V' \subseteq V$, also $a \in V$. Da a aus K beliebig war, folgt wegen $V \subseteq K$ auch $K = V$. Da andererseits V eine beliebige Filtermenge aus $\mathcal{G}$ war, muß $\mathcal{G} = \{K\}$ gelten. Da $\mathcal{G}$ bezüglich der Limitierung t gegen 0 konvergiert und t mit der linearen Struktur von K kompatibel sein soll, folgt, daß t die indiskrete Topologie sein muß.

(13.3) Bemerkung: Der Beweis bei Bourbaki ([3]) dafür, daß auf einem nichtdiskret bewerteten, vollständigen Körper keine gröbere, mit der Linearstruktur verträgliche, separierte Topologie existieren kann, beruht im Wesentlichen darauf, daß die Annahme der Existenz einer gröberen, separierten Topologie zu einem Widerspruch führt. Wie aus (13.2) resultiert, geht bei diesem Ergebnis nur der Umstand in den Beweis ein, daß bei gegenteiliger Annahme ein Filter existieren muß, der dieselben Eigenschaften wie der Filter $\mathcal{G}$ in (13.2) besitzt.

Für lokalkompakte, nichtdiskret bewertete Körper (K , die wegen der Lokalkompaktheit vollständig sind, t) kann nun der folgende, allgemeinere Satz formuliert werden:

(13.4) Satz: Sei (K, T_{nat}) ein nichtdiskret bewerteter, lokalkompakter Körper. Dann ist die von der Bewertung induzierte Topologie T_{nat} die einzige mit der Linear-

struktur von K kompatible, separierte Limitierung.

Beweis: Sei t eine kompatible, separierte Limitierung auf K . Wie im Beweis von (13.2) folgt dann, daß $T_{\text{nat}} \leq t$ gelten muß. Es ist demnach die Annahme $T_{\text{nat}} < t$ beziehungsweise $T_{\text{nat}}(0) \subset t(0)$, was hierzu äquivalent ist, zu einem Widerspruch zu führen. Demnach muß also die Existenz eines Filters $\mathfrak{X}$ aus $t(0)$ mit $\bigvee \notin \mathfrak{X}$ widerlegt werden. Definiere $\mathcal{A} := \bigvee \wedge \mathfrak{X}$. Dann gilt $\bigvee > \mathcal{A}$ und $\mathcal{A} \in t(0)$. Wegen dieser Relation muß es eine Menge A aus $\bigvee$ geben, so daß für alle V aus $\mathcal{A}$ gilt $V \setminus A \neq \emptyset$. Wäre dies nicht der Fall, so würde man sofort einen Widerspruch zur Relation $\bigvee > \mathcal{A}$ erhalten. Demnach besitzt der Filter $\mathcal{A}$ eine Spur auf dem Komplement A^c von A in K . Auf Grund der Definition der Nullumgebungen in (K, T_{nat}) kann angenommen werden, daß es $r > 0$ derart gibt, daß $S(0, r[\subseteq A$ gilt. Aus dem Beweis von (13.2) geht hervor, daß $\mathcal{A}$ mindestens eine beschränkte Menge B enthalten muß, denn sonst würde der gleichförmige Filter $\bigvee \mathcal{A}$ aus $t(0)$ ebenfalls keine beschränkte Menge enthalten, es würde nach (13.2) $\bigvee \mathcal{A} = \{K\}$ gelten und t wäre folglich die indiskrete Topologie. Als Obermenge liegt nun auch die bezüglich der Topologie T_{nat} abgeschlossene Hülle $\bar{B}$ von B in $\mathcal{A}$. Dann ist $D := A^c \cap \bar{B}$ eine abgeschlossene und beschränkte Teilmenge von K , auf der der Filter $\mathcal{A}$ eine Spur besitzt. D ist wegen der Lokalkompaktheit von (K, T_{nat}) eine kompakte Menge in (K, T_{nat}) . Es gilt ferner $\mathcal{M} := F_K(\text{Sp}_D(\mathcal{A})) \geq \mathcal{A}$ und mithin $\mathcal{M} \in t(0)$. Man wähle nun zu $\text{Sp}_D(\mathcal{A})$ einen Ultrafilter $\mathcal{U}$ auf D .

Dieser Filter $\mathcal{U}$ konvergiert wegen der Kompaktheit von $(D, (T_{\text{nat}})_D)$ gegen ein Element x aus D . Für den Ultrafilter gilt: $F_K(\mathcal{U})$ ist ein Ultrafilter auf K , der bezüglich T_{nat} gegen den Punkt x konvergiert, denn gerade so war die Relativtopologie definiert. Da die Topologie T_{nat} feiner als die Limitierung t ist, konvergiert $F_K(\mathcal{U})$ auch bezüglich der Limitierung t gegen den Punkt x aus D . Andererseits ist aber $F_K(\mathcal{U}) \supseteq F_K(\text{Sp}_D(\mathcal{A})) = \mathcal{N}$ und folglich $F_K(\mathcal{U}) \in t(0)$. Nach Konstruktion von D gilt aber $0 \notin D$. Damit ist aber ein Filter konstruiert, der bezüglich der Limitierung t gegen zwei verschiedene Grenzwerte konvergiert, was einen Widerspruch zur Voraussetzung, daß t separiert ist, erzeugt. Folglich ist die Annahme, daß die Limitierung t gröber als die Bewertungstopologie sein kann, zu einem Widerspruch geführt worden und der Satz bewiesen.

(13.5) Lemma: Sei (E, t) ein gleichförmig limitierter K -Vektorraum, $M \subseteq E$ sei ein Unterraum. Dann ist (M, t_M) ebenfalls ein gleichförmig limitierter Vektorraum.

Beweis: Sei f aus $t_M(0)$. Das ist genau dann der Fall, wenn $F_E(f) \in t(0)$ gilt. Da (E, t) gleichförmig ist, gibt es einen Filter $\mathcal{G}$ aus $t(0)$ mit $\bigvee \mathcal{G} = \mathcal{G}$ und $F_E(f) \supseteq \mathcal{G}$. Wegen $\bigvee \mathcal{G} = \mathcal{G}$ folgt, daß jede Menge aus $\mathcal{G}$ den Nullvektor enthält. Folglich muß $\mathcal{G}$ auf dem Unterraum M eine Spur besitzen. Wegen $\text{Sp}_M(F_E(f)) = f$ und der Monotonie des Spuoperators folgt dann aber $f \supseteq \text{Sp}_M(\mathcal{G})$. Ferner gilt $F_E(f) \in t(0)$.

Nach Definition der Relativlimitierung ist wegen

$$F_E(\text{Sp}_M(\mathcal{G})) \cong \mathcal{G} \text{ auch } \text{Sp}_M(\mathcal{G}) \in t_M(o).$$

Es werde nun gezeigt, daß auf M die Relation

$$\text{Sp}_M(\mathcal{G}) = \bigvee \text{Sp}_M(\mathcal{G}) \text{ erfüllt ist, d.h., daß } \text{Sp}_M(\mathcal{G}) \text{ gleichförmig ist. Sei } G' \text{ aus } \text{Sp}_M(\mathcal{G}). \text{ Dann gibt es } G \text{ aus } \mathcal{G} \text{ derart, daß } G' = G \wedge M \text{ gilt. Aus } \bigvee \mathcal{G} = \mathcal{G}$$

folgt für jedes a aus K mit $a \neq 0$ stets $aG \in \mathcal{G}$. Wegen $aM = M$ folgt $aG' = aG \wedge M \in \text{Sp}_M(\mathcal{G})$. Ferner existiert wegen $\bigvee \mathcal{G} = \mathcal{G}$ eine Menge G^* aus $\mathcal{G}$ mit

$$S(0,1].G^* = G^* \subseteq G. \text{ Da } M \text{ ein Vektorraum ist, ist}$$

$$S(0,1].M = M. \text{ Dann folgt aber für } G^* \wedge M:$$

$$G^* \wedge M = S(0,1](G^* \wedge M) \subseteq G \wedge M = G'. \text{ Also gilt}$$

$\bigvee \text{Sp}_M(\mathcal{G}) = \text{Sp}_M(\mathcal{G})$. Demnach ist (M, t_M) ein gleichförmig limitierter Vektorraum.

(13.6) Lemma: (E_1, t_1) sei ein gleichförmig limitierter K -Vektorraum, E sei ein K -Vektorraum, $f: E_1 \longrightarrow E$ sei eine surjektive, lineare Abbildung. Dann ist der Quotientenraum (E, t_Q) ebenfalls gleichförmig.

Beweis: Sei $\mathcal{F} \in t_Q(o)$. Das ist genau dann der Fall, wenn es $\mathcal{G}_1$ aus $t_1(o)$ gibt mit $\mathcal{F} \cong f(\mathcal{G}_1)$.

Da (E_1, t_1) gleichförmig ist, existiert ein Filter

$\mathcal{G}_2$ aus $t_1(o)$, der den Relationen $\mathcal{G}_1 \cong \mathcal{G}_2$ und $\bigvee \mathcal{G}_2 = \mathcal{G}_2$ genügt. Dann gilt aber nach Definition der Quotientenlimitierung $f(\mathcal{G}_2) \in t_Q(o)$

und wegen der Linearität von f : $\bigvee f(\mathcal{G}_2) = f(\bigvee \mathcal{G}_2) = f(\mathcal{G}_2)$. Hieraus folgt aber, daß (E, t_Q) gleichförmig limitiert ist.

(13.7) Satz: I) Sei (K, T_{nat}) ein nichtdiskret bewerteter, vollständiger Körper. E sei ein endlichdimension-

naler Vektorraum über K , $\dim E = n$; t sei eine separierte, gleichförmige, kompatible Limitierung auf E . Dann sind (E, t) und der Produktraum (K^n, T_{nat}^n) linear homöomorph.

II) Sei (K, T_{nat}) ein nichtdiskret bewerteter, lokalkompakter Körper, E sei ein endlichdimensionaler Vektorraum über K , $\dim E = n$; t sei eine separierte, kompatible Limitierung auf E . Dann sind der Produktraum (K^n, T_{nat}^n) und (E, t) linear homöomorph.

Beweis: Der Beweis wird mit Hilfe vollständiger Induktion nach der Dimension von E durchgeführt. Das Beweisschema ist für die Fälle (I) und (II) dasselbe. Aus diesem Grunde wird der Beweis für beide Fälle gleichzeitig durchgeführt. Beim Beweis des Falles (I) sind bei der Bildung von Unter- und Quotientenräumen jeweils die Lemmata (13.5) und (13.6) zu beachten.

- a) Für den Fall $\dim E = 1$ folgt die Behauptung aus Isomorphiegründen aus den Sätzen (13.2) und (13.3).
- b) Sei $\dim E = n > 1$. Induktionsannahme: Die Behauptung sei richtig für alle Vektorräume, auf die die Voraussetzungen in (I) oder (II) zutreffen und deren Dimension kleiner als n ist.

Man wähle nun einen Unterraum H von E mit $\dim H = n-1$. Ferner sei D ein algebraisches Komplement zu H in E . Es gilt also: $\dim D = 1$ und $E = H \oplus D$.

t_H und t_D seien die Relativlimitierungen auf H beziehungsweise D . Nach Induktionsvoraussetzung und (13.5) resultieren die folgenden linearen Homöomorphismen:

$$\begin{aligned} (K^{n-1}, T_{\text{nat}}^{n-1}) &\cong (H, t_H) \\ (K, T_{\text{nat}}) &\cong (D, t_D) . \end{aligned}$$

Für die Einbettungen $j_H: H \longrightarrow E$ und $j_D: D \longrightarrow E$ gilt nach Definition der Relativlimitierung :

$$j_H: (H, t_H) \longrightarrow (E, t) \quad \text{und} \quad j_D: (D, t_D) \longrightarrow (E, t) .$$

Dann folgt aber, wie man sofort nachrechnet:

$$j_H \times j_D: (H \times D, t_H \times t_D) \longrightarrow (E \times E, t \times t) .$$

Wegen der Stetigkeit der Addition α auf E ist dann :

$$\alpha(j_H \times j_D): (H \times D, t_H \times t_D) \longrightarrow (E, t)$$

eine stetige, bijektive und lineare Abbildung. Da nach (6.7) für topologische Räume initiale Strukturen in $\underline{L}$ und $\underline{\text{Top}}$ übereinstimmen, folgt wegen obiger linearer Homöomorphismen auch die lineare Homöomorphie

$$(K^n, T_{\text{nat}}^n) \cong (H \times D, t_H \times t_D) .$$

Dann existiert eine stetige, bijektive und lineare Abbildung $I_1: (K^n, T_{\text{nat}}^n) \longrightarrow (E, t)$.

Da nach den Voraussetzungen (I) beziehungsweise (II) (K, T_{nat}) vollständig ist, sind dann auch die Produkträume (K^k, T_{nat}^k) ($k \in \mathbb{N}$) vollständig. Dann sind wegen Induktionsvoraussetzung und (13.5) die Räume (H, t_H) sowie (D, t_D) vollständige Unterräume von (E, t) . Dann folgt nach (9.25) , daß die Quotientenräume

$(E/H, t_{Q_H})$ und $(E/D, t_{Q_D})$ separierte, limitierte und im Falle (I) nach (13.6) gleichförmige Vektorräume sind. Wegen $\dim(E/H) = 1$ und $\dim(E/D) = n-1$ folgen wegen der Induktionsannahme die linearen Homöomor-

$$\begin{aligned} \text{phien:} \quad (E/H, t_{Q_H}) &\cong (K, T_{\text{nat}}) \\ (E/D, t_{Q_D}) &\cong (K^{n-1}, T_{\text{nat}}^{n-1}) . \end{aligned}$$

Wegen der Stetigkeit der natürlichen Homomorphismen

nach Definition der Quotientenlimitierungen folgen aus diesen linearen Homöomorphismen die Existenz der stetigen, surjektiven, linearen Abbildungen

$$J_1: (E, t) \longrightarrow (K, T_{\text{nat}}) \quad \text{mit} \quad J_1^{-1}(o) = H$$

$$J_2: (E, t) \longrightarrow (K^{n-1}, T_{\text{nat}}^{n-1}) \quad \text{mit} \quad J_2^{-1}(o) = D.$$

Dann ist die Abbildung $I_2: E \longrightarrow K^n$ definiert durch

$$I_2(x) = (J_1(x), J_2(x)) \quad \text{eine lineare, bijektive Abbildung.}$$

Aus den obigen Relationen für J_1 und J_2 und aus den Eigenschaften von Produkttopologien respektive Produktlimitierungen (siehe (6.7)) folgt dann aber

$$I_2: (E, t) \longrightarrow (K^n, T_{\text{nat}}^n). \quad \text{Es ist ferner } I_1^{-1} I_2^{-1}: K^n \longrightarrow K^n$$

eine bijektive, lineare Abbildung. Da auf (K^n, T_{nat}^n)

jede lineare Abbildung stetig ist, was unmittelbar aus

der Definition der Produkttopologie folgt, resultiert:

$$I_1^{-1} I_2^{-1}: (K^n, T_{\text{nat}}^n) \longrightarrow (K^n, T_{\text{nat}}^n). \quad \text{Wegen } I_1^{-1} = I_1^{-1} I_2 =$$

$$= I_1^{-1} I_2^{-1} I_2 \quad \text{folgt dann aber auf Grund des soeben Bewie-$$

senen, daß $I_1^{-1}: (E, t) \longrightarrow (K^n, T_{\text{nat}}^n)$ gilt. Demnach ist

I_1 ein linearer Homöomorphismus und der Satz bewiesen.

(13.8) Corollar: Ist (E, t) ein endlichdimensionaler, separierter, limitierter Vektorraum über R oder C , so ist t mit der euklidischen Topologie auf E identisch.

Mit (12.1) zusammen erhält man den folgenden Charakterisierungssatz endlichdimensionaler R - beziehungsweise C -Vektorräume:

(13.9) Satz: Sei E ein R - oder C -Vektorraum. E ist genau dann endlichdimensional, wenn für jede separierte, kompatible Limitierung t auf E auch die Limitierungen $p_E(t)$ und $o_E(t)$ kompatibel sind. Dann gilt:

$$t = p_E(t) = o_E(t) = p_E^1(t) = p_E^0(t).$$

$$(K^{n-1}, T_{\text{nat}}^{n-1}) \cong (H, t_H)$$

$$(K, T_{\text{nat}}) \cong (D, t_D) .$$

Für die Einbettungen $j_H: H \longrightarrow E$ und $j_D: D \longrightarrow E$ gilt nach Definition der Relativlimitierung :

$$j_H: (H, t_H) \longrightarrow (E, t) \quad \text{und} \quad j_D: (D, t_D) \longrightarrow (E, t) .$$

Dann folgt aber, wie man sofort nachrechnet:

$$j_H \times j_D: (H \times D, t_H \times t_D) \longrightarrow (E \times E, t \times t) .$$

Wegen der Stetigkeit der Addition α auf E ist dann :

$$\alpha(j_H \times j_D): (H \times D, t_H \times t_D) \longrightarrow (E, t)$$

eine stetige, bijektive und lineare Abbildung. Da nach (6.7) für topologische Räume initiale Strukturen in L und Top übereinstimmen, folgt wegen obiger linearer Homöomorphismen auch die lineare Homöomorphie

$$(K^n, T_{\text{nat}}^n) \cong (H \times D, t_H \times t_D) .$$

Dann existiert eine stetige, bijektive und lineare Abbildung $I_1: (K^n, T_{\text{nat}}^n) \longrightarrow (E, t)$.

Da nach den Voraussetzungen (I) beziehungsweise (II) (K, T_{nat}) vollständig ist, sind dann auch die Produkträume (K^k, T_{nat}^k) ($k \in \mathbb{N}$) vollständig. Dann sind wegen Induktionsvoraussetzung und (13.5) die Räume (H, t_H) sowie (D, t_D) vollständige Unterräume von (E, t) . Dann folgt nach (9.25) , daß die Quotientenräume

$(E/H, t_{Q_H})$ und $(E/D, t_{Q_D})$ separierte, limitierte und im Falle (I) nach (13.6) gleichförmige Vektorräume sind. Wegen $\dim(E/H) = 1$ und $\dim(E/D) = n-1$ folgen wegen der Induktionsannahme die linearen Homöomor-

$$\begin{aligned} \text{phien:} \quad (E/H, t_{Q_H}) &\cong (K, T_{\text{nat}}) \\ (E/D, t_{Q_D}) &\cong (K^{n-1}, T_{\text{nat}}^{n-1}) . \end{aligned}$$

Wegen der Stetigkeit der natürlichen Homomorphismen

nach Definition der Quotientenlimitierungen folgen aus diesen linearen Homöomorphismen die Existenz der stetigen, surjektiven, linearen Abbildungen

$$J_1: (E, t) \longrightarrow (K, T_{\text{nat}}) \quad \text{mit} \quad J_1^{-1}(o) = H$$

$$J_2: (E, t) \longrightarrow (K^{n-1}, T_{\text{nat}}^{n-1}) \quad \text{mit} \quad J_2^{-1}(o) = D \quad .$$

Dann ist die Abbildung $I_2: E \longrightarrow K^n$ definiert durch

$$I_2(x) = (J_1(x), J_2(x)) \quad \text{eine lineare, bijektive Abbildung.}$$

Aus den obigen Relationen für J_1 und J_2 und aus den Eigenschaften von Produkttopologien respektive Produktlimitierungen (siehe (6.7)) folgt dann aber

$$I_2: (E, t) \longrightarrow (K^n, T_{\text{nat}}^n) \quad . \quad \text{Es ist ferner} \quad I_1^{-1} I_2^{-1}: K^n \longrightarrow K^n$$

eine bijektive, lineare Abbildung. Da auf (K^n, T_{nat}^n)

jede lineare Abbildung stetig ist, was unmittelbar aus

der Definition der Produkttopologie folgt, resultiert:

$$I_1^{-1} I_2^{-1}: (K^n, T_{\text{nat}}^n) \longrightarrow (K^n, T_{\text{nat}}^n) \quad . \quad \text{Wegen} \quad I_1^{-1} = I_1^{-1} 1_E =$$

$$= I_1^{-1} I_2^{-1} I_2 \quad \text{folgt dann aber auf Grund des soeben Bewie-$$

senen, daß $I_1^{-1}: (E, t) \longrightarrow (K^n, T_{\text{nat}}^n)$ gilt. Demnach ist

I_1 ein linearer Homöomorphismus und der Satz bewiesen.

(13.8) Corollar: Ist (E, t) ein endlichdimensionaler, separierter, limitierter Vektorraum über R oder C , so ist t mit der euklidischen Topologie auf E identisch.

Mit (12.1) zusammen erhält man den folgenden Charakterisierungssatz endlichdimensionaler R - beziehungsweise C -Vektorräume:

(13.9) Satz: Sei E ein R - oder C -Vektorraum. E ist genau dann endlichdimensional, wenn für jede separierte, kompatible Limitierung t auf E auch die Limitierungen $p_E(t)$ und $o_E(t)$ kompatibel sind. Dann gilt:

$$t = p_E(t) = o_E(t) = p_E^1(t) = p_E^o(t) \quad .$$

Literaturverzeichnis

- [1] E.Binz : " Ein Differenzierbarkeitsbegriff auf limitierten Vektorräumen." , Comm. Math. Helv. 41 , 1966-67 , pp. 137 - 156.
- [2] E.Binz und H.H.Keller : " Funktionenräume in der Kategorie der Limes-Räume." , Ann. Acad. Sci. Fenn., Serie A 383 , 1966 .
- [3] N.Bourbaki : " Espaces vectoriels topologiques " , Éléments de Mathématique, Livre V, vol. I , Hermann, Paris, 1953 .
- [4] H.R.Fischer : " Limes-Räume " , Math. Ann. 137, 1959, pp. 269 - 303 .
- [5] K.Floret und J.Wloka : " Einführung in die Theorie der lokalkonvexen Vektorräume." , Springer, Berlin-Heidelberg-New York, Lecture Notes 56 , 1968 .
- [6] A.Frölicher und W.Bucher : " Calculus in vector spaces without norm " , Springer, Berlin-Heidelberg-New-York, Lecture Notes 30 , 1967 .
- [7] H.H.Keller: " Über Probleme, die bei einer Differentialrechnung in topologischen Vektorräumen auftreten." , Festband zum siebzigsten Geburtstag von R. Nevanlinna, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1966 , pp. 49 - 57.
- [8] H.H.Keller: " Differenzierbarkeit in topologischen Vektorräumen." , Comm. Math. Helv. 38, 1963/64 , pp. 308 - 320 .
- [9] H.H.Keller: " Räume stetiger multilinearer Abbildungen als Limes-Räume." , Math. Ann. 159 , 1965 , pp. 259 - 270 .

- [10] G.Köthe: " Lineare topologische Räume I ", Grund-
lehren der Mathematischen Wissenschaften in Ein-
zeldarstellungen 107 , Berlin-Göttingen-Heidelberg,
1960 .
- [11] H.J.Kowalsky: " Limes-Räume und Kompletttierung ",
Math. Nachr. 12 , 1954 , pp. 301-340 .
- [12] B.Maissen: " Über Topologien im Endomorphismenraum
eines topologischen Vektorraumes." , Math.Ann. 151,
1963, pp. 283 - 285 .
- [13] G.Marinescu: "Espaces vectoriels pseudotopologiques
et théorie des distributions.", VEB Verlag Deut-
scher Wissenschaften, Berlin 1963 .
- [14] H.Schubert: "Topologie" , Teubner , Stuttgart, 1964 .
- [15] A.Wilansky: "Topics in functional analysis." ,
Springer, Berlin-Heidelberg-New York , Lecture
Notes 45 , 1967 .

Lebenslauf

Am 17. Oktober 1941 wurde ich als Sohn von Dr.iur.Kurt Albert Kutzler und dessen Frau Luise geb. Wanschura in Aussig/Elbe geboren. Nach der Aussiedlung meiner Familie aus der Tschechoslowakei besuchte ich von 1947 bis 1952 in Bayern (Regenstauf/Obpf., Landshut, Regensburg) die Volksschule. Im Sommer 1952 bestand ich die Aufnahmeprüfung in das Neue Gymnasium Regensburg, dessen Schüler ich bis Januar 1954 war. Von 1954 bis 1961 besuchte ich das Goethe-Gymnasium in Berlin-Wilmersdorf, an dem ich am 15. März 1961 die Reifeprüfung ablegte. Vom SS 1961 bis zum WS 1966/67 war ich an der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der Freien Universität Berlin als Student der Mathematik immatrikuliert. Am 14. Mai 1964 bestand ich die Vorprüfung zum Diplom, am 20. Februar 1967 legte ich die Diplomprüfung ab. Das Thema der Diplomarbeit wurde von Prof.Dr.H.Pachale gestellt und lautete: "Monotone Operatoren auf Hilbert-Räumen und Hammersteinsche Integralgleichungen." . Vom 15. Oktober 1965 bis zum 31. Mai 1967 war ich als wiss. Hilfsassistent am I. Math. Institut der FU angestellt. Am 1. Juni 1967 wurde ich mit der Wahrnehmung der Dienstgeschäfte eines wissenschaftlichen Assistenten am selben Institut beauftragt. Am 1. Dezember 1967 wurde ich zum wissenschaftlichen Assistenten ernannt. Seit dem 23. Dezember 1968 bin ich mit meiner Frau Dr.med.Cordula Kutzler geb. Rüsken verheiratet.

Einleitung

Die vorliegende Arbeit ist eine Darstellung der Geschichte der deutschen Literatur von der Mitte des 18. Jahrhunderts bis zur Gegenwart. Sie ist in drei Teile gegliedert: der erste Teil behandelt die Zeit von 1750 bis 1800, der zweite Teil die Zeit von 1800 bis 1850, der dritte Teil die Zeit von 1850 bis zur Gegenwart. In jedem Teil sind die wichtigsten Autoren und Werke dargestellt, und die Entwicklung der Literatur wird skizziert. Die Arbeit ist für Studierende der Germanistik und der Literaturgeschichte geeignet.

Die deutsche Literatur der Mitte des 18. Jahrhunderts ist geprägt von der Aufklärung. Die Autoren streben nach einer Vernunft und nach einer moralischen Erneuerung der Gesellschaft. Die wichtigsten Autoren dieser Zeit sind Lessing, Mendelssohn und Herder. Lessing ist der Begründer der deutschen Aufklärung. Er hat die wichtigsten Werke der Aufklärung geschrieben, wie die "Nathan der Weise" und die "Hannibal". Mendelssohn ist ein Philosoph und Schriftsteller. Er hat die "Phädon" und die "Jerusalem" geschrieben. Herder ist ein Philosoph und Schriftsteller. Er hat die "Kritik der Urteilskraft" und die "Kritik der Vernunft" geschrieben.

Die deutsche Literatur des 19. Jahrhunderts ist geprägt von der Romantik. Die Autoren streben nach einer Erneuerung der deutschen Literatur und nach einer Erneuerung der deutschen Nation. Die wichtigsten Autoren dieser Zeit sind Goethe, Schiller, Hegel und Schopenhauer. Goethe ist der größte Dichter der deutschen Literatur. Er hat die wichtigsten Werke der Romantik geschrieben, wie die "Faust" und die "Wilhelm Meister". Schiller ist ein Philosoph und Schriftsteller. Er hat die "Kritik der Urteilskraft" und die "Kritik der Vernunft" geschrieben. Hegel ist ein Philosoph. Er hat die "Phänomenologie des Geistes" und die "Vorlesungen über die Geschichte der Philosophie" geschrieben. Schopenhauer ist ein Philosoph. Er hat die "Die Welt als Wille und Vorstellung" geschrieben.

Die deutsche Literatur der Gegenwart ist geprägt von der Moderne. Die Autoren streben nach einer Erneuerung der deutschen Literatur und nach einer Erneuerung der deutschen Nation. Die wichtigsten Autoren dieser Zeit sind Kafka, Brecht und Grass. Kafka ist ein Schriftsteller. Er hat die "Metamorphose" und die "Verurteilung" geschrieben. Brecht ist ein Dramatiker. Er hat die "Dreigroschenoper" und die "Mutter Courage" geschrieben. Grass ist ein Schriftsteller. Er hat die "Hundezeit" und die "Himmel und Erde" geschrieben.

Die deutsche Literatur der Gegenwart ist geprägt von der Postmoderne. Die Autoren streben nach einer Erneuerung der deutschen Literatur und nach einer Erneuerung der deutschen Nation. Die wichtigsten Autoren dieser Zeit sind Derrida, Foucault und Lyotard. Derrida ist ein Philosoph. Er hat die "Die Schrift und die Differenz" geschrieben. Foucault ist ein Philosoph. Er hat die "Die Macht und das Wissen" geschrieben. Lyotard ist ein Philosoph. Er hat die "Die Differenz des Subjekts" geschrieben.

